Chapitre 4

Les polygones réguliers

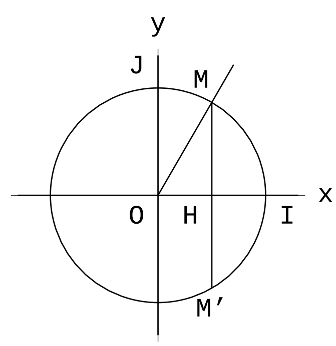
Nous avons étudié au chapitre précédent trois problèmes grecs que nous pourrions qualifier de plus célèbres avec les polygones réguliers. Terminons par leur étude.

1 Les polygones réguliers constructibles

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé des angles non orientés pour le problème de la trisection de l'angle. Nous aurons besoin ici d'angles orientés et de leurs mesures.

A partir des points de base O et I, nous avons construit, dans le second chapitre, le repère orthonormé (O, I, J) du plan P. Ce repère oriente le plan, ce qui nous permet de parler de mesure des angles orientés. On désigne toujours par Γ le cercle de centre O et passant par I.

Si θ appartient à $\mathbb{R}$, on note $\widehat{\theta}$ l'angle orienté dont une mesure en radians est θ, ses autres mesures sont alors $\theta + 2k\pi$ pour k appartenant à $\mathbb{Z}$. L'angle $\widehat{\theta}$ possède une unique mesure en radians α appartient à $]-\pi, \pi]$ qui est appelée sa détermination principale. L'angle $\widehat{\theta}$ est dit constructible si le point M de Γ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \widehat{\theta}$ est un point constructible. Dire que $\widehat{\theta}$ est constructible équivaut à dire que $cos\ \theta$ est un nombre constructible. En fait, si $\overline{OH} = cos\ \theta$, la perpendiculaire à la droite (OI) passant par H coupe le cercle Γ en deux points M et M'. On choisit qui des deux points M et M', correspond à $\widehat{\theta}$ suivant la détermination principale de $\widehat{\theta}$.



Définition 1 *Si $n \geq 3$, on dit que le polygone régulier à n côtés est constructible si $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ est un angle constructible, ce qui est équivalent à dire que $cos\frac{2\pi}{n}$ est un nombre constructible.*

Cette définition correspond bien à la pratique car si $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = \widehat{\frac{2\pi}{n}}$, I et M sont deux sommets consécutifs du polygone cherché. Les autres sommets s'obtiennent en reportant au compas la corde IM autant de fois qu'il le faut.

2 Le théorème de Gauss

Nous donnons ici la caractérisation des polygones réguliers constructibles, qui constitue ce que nous appelons le théorème de Gauss. Ce théorème fut publié par Gauss en 1801.

Lemme 1 *Si m et n sont premiers entre eux, $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ est constructible si et seulement si $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ sont constructibles.*

Démonstration.

- Si $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ est constructible alors $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ le sont aussi car $\widehat{\frac{2\pi}{n}} = m\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{m}} = n\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ et il est facile, à partir d'un angle, de construire un multiple de cet angle en reportant avec le compas un certain nombre de fois la corde déterminée par cet angle sur le cercle Γ de centre O passant par I. (La condition m et n premiers entre eux n'intervient pas ici).

- Si $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ sont constructibles alors $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ l'est aussi car d'après la relation de Bezout il existe λ et μ dans $\mathbb{Z}$ tels que $\lambda n + \mu m = 1$, d'où $\widehat{\frac{2\pi}{mn}} = \lambda\widehat{\frac{2\pi}{m}} + \mu\widehat{\frac{2\pi}{n}}$. Il suffit alors de savoir construire la somme de deux angles constructibles ce qui se fait en construisant des représentants de ces angles avec un côté adjacent.□

Lemme 2 *Soit $n \geq 3$ un entier ayant pour décomposition en facteurs premiers $n = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_k}^{\alpha_k}$. Alors le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si les angles $\widehat{\frac{2\pi}{{p_1}^{\alpha_1}}}, \ldots, \widehat{\frac{2\pi}{{p_k}^{\alpha_k}}}$ sont constructibles.*

Ce lemme résulte immédiatement du lemme précédent par récurrence sur k. Grâce à ce lemme nous sommes ainsi ramenés à déterminer les angles constructibles de la forme $\widehat{\frac{2\pi}{p^\alpha}}$ où p est premier et α appartient à $\mathbb{N}^*$.

Théorème 1

1. *Les angles de la forme $\widehat{\frac{2\pi}{2^\alpha}}$ sont constructibles.*
2. *Si p est premier et $p \geq 3$, $\widehat{\frac{2\pi}{p^\alpha}}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre de Fermat, c'est-à-dire un nombre de la forme $1 + 2^{(2^\beta)}$.*

Démonstration.

1. Il est immédiat que les angles $\widehat{\frac{2\pi}{2^\alpha}}$ sont constructibles. Cela se démontre par récurrence sur α. Il suffit de savoir construire des bissectrices ce qui est élémentaire.

2. Soit p un nombre premier, $p \geq 3$.

   - Supposons que $\widehat{\frac{2\pi}{2^\alpha}}$ soit constructible avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $cos\frac{2\pi}{2^\alpha}$ est un nombre constructible et d'après le résultat de Wantzel (vu dans notre second chapitre) on a:
   $$[\mathbb{Q}(cos\tfrac{2\pi}{2^\alpha});\mathbb{Q}] = 2^m \text{ pour un certain entier } m. \qquad (1)$$
   Pour simplifier posons $q := p^\alpha$ et considérons $\omega = cos\frac{2\pi}{q} + i\ sin\frac{2\pi}{q}$. C'est une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité, racine de $X^q - 1$, ω est donc algébrique sur $\mathbb{Q}$. Nous admettons ici que le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$ est donné par $P(X) = (X - \omega_1)(X - \omega_2)\ldots(X - \omega_h)$ où les ω_i, pour $1 \leq i \leq h$, sont les racines primitives $q^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire que les ω_i sont de la forme $cos\frac{2k\pi}{q} + i\ sin\frac{2k\pi}{q}$ avec k premier avec q et $1 \leq k \leq q$. ($P(X)$ est appelé le $q^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique). Pour trouver le degré h de $P(X)$ il suffit de connaître le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq q$ et k premier avec $q = p^\alpha$. On obtient $h = p^{\alpha-1}(p-1)$. Nous avons donc:
   $$[\mathbb{Q}(\omega);\mathbb{Q}] = p^{\alpha-1}(p-1). \qquad (2)$$
   Nous avons $\omega + \omega^{-1} = 2\ cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha}$. Il en résulte que $cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha}$ appartient à $\mathbb{Q}(\omega)$ et que
   $$\omega^2 - 2\omega cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha} + 1 = 0.$$
   Ainsi ω est algébrique et de degré 2 sur $\mathbb{Q}(cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha})$ d'où:
   $$[\mathbb{Q}(\omega);\mathbb{Q}(cos\ \tfrac{2\pi}{p^\alpha})] = 2. \qquad (3)$$
   A partir des relations (1), (2) et (3) sachant que $[\mathbb{Q}(\omega);\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\omega);\mathbb{Q}(cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha})] \times [\mathbb{Q}(cos\ \frac{2\pi}{p^\alpha});\mathbb{Q}]$, on obtient $p^{\alpha-1}(p-1) = 2^{m+1}$. Comme p est premier différent de 2, il en résulte que $\alpha = 1$ et $p = 1 + 2^{m+1}$. Montrons que $m+1$ est une puissance de 2. A partir de la décomposition de $m+1$ en facteurs premiers, on obtient $m + 1 = \lambda 2^\beta$ avec β appartenant à $\mathbb{N}$ et λ impair appartenant à $\mathbb{N}^*$. Ainsi $p = 1 + 2^{m+1} = 1 + 2^{(\lambda 2^\beta)} = 1 + \left(2^{2^\beta}\right)^\lambda$. Comme λ est impair, le polynôme $1 + X^\lambda$ est divisible par $1 + X$. Il en résulte que p est divisible par $1 + 2^{(2^\beta)}$, mais comme p est premier on a $p = 1 + 2^{(2^\beta)}$.
   Bien que Gauss ait pressenti et affirmé le résultat partiel que nous venons d'établir, il ne l'a pas démontré. Il faut dire qu'en 1801 Gauss ne pouvait utiliser le résultat de Wantzel de 1837. Par contre Gauss a démontré la réciproque de ce résultat qui complète la démonstration du théorème, à savoir:

   - Si $p \geq 3$ est un nombre premier qui est un nombre de Fermat alors $\widehat{\frac{2\pi}{p}}$ est constructible. Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce résultat. Dans les cas particuliers où $p = 3, 5, 17$ la démonstration se trouve au paragraphe suivant où l'on construit les polygones réguliers à 3, 5, 17 côtés. □

Théorème 2 (Théorème de Gauss)
Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre n de côtés est de la forme 2^α avec $\alpha \geq 2$ ou de la forme $2^\alpha p_1 p_2 \ldots p_r$ avec α appartenant à N^* et où les p_i sont des nombres premiers distincts qui sont des nombres de Fermat.

Ce théorème résulte immédiatement du Lemme 2 et du Théorème 1.

Remarques.

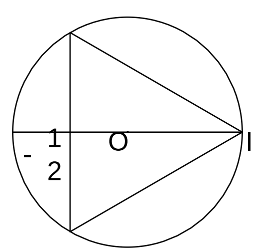
1. Les cinq premiers nombres de Fermat sont 3, 5, 17, 257, 65537, obtenus à partir de la formule $p = 1 + 2^{(2^\beta)}$ pour $\beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Ces cinq nombres sont premiers, ce qui fut vérifié en 1640 par Pierre de Fermat (1601-1665). Mais Fermat avait aussi affirmé que tous les nombres de la forme $1 + 2^{(2^\beta)}$ étaient des nombres premiers. C'est seulement en 1732 que Léonard Euler (1707-1783) s'aperçut que pour $\beta = 5$ le nombre de Fermat correspondant 4 294 967 297 n'était pas premier car divisible par 641. Bien que l'on ait étudié les nombres de Fermat pour de nombreuses valeurs de β, les seuls nombres de Fermat premiers connus sont les cinq nombres 3, 5, 17, 257, 65 537. Le problème de savoir s'il en existe d'autres est à l'heure actuelle un problème ouvert.

2. Pour n= 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, les polygones réguliers à n côtés sont constructibles. Pour n= 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, ils ne le sont pas. Euclide connaissait les constructions pour $n = 3,\ 4,\ 5,\ 15$ et il savait, bien sûr, doubler le nombre de côtés d'un polygone constructible. On ne sût rien faire de mieux jusqu'en 1796 ou Gauss alors agé de 19 ans montra que le polygone régulier à 17 côtés était constructible.

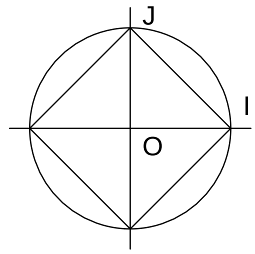
3 Construction de polygones réguliers

3.1 Triangle - Carré - Pentagone

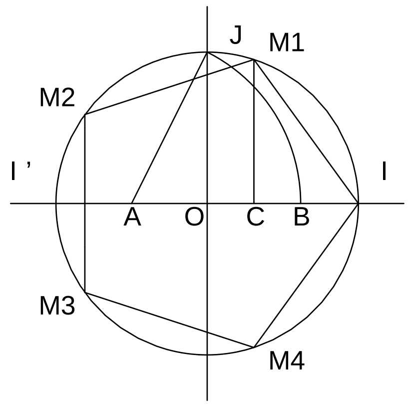
- La construction du triangle équilatéral ne pose aucun problème, sachant que $cos\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.



- La construction du carré est triviale à l'aide des points I et J.



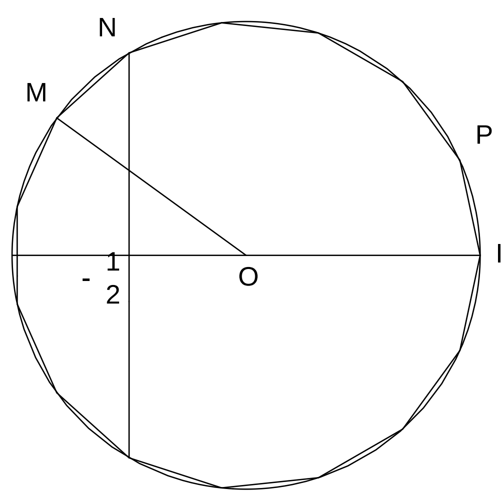
- La construction du pentagone régulier est un peu plus délicate mais bien classique. Il nous suffit d'exprimer $cos\ \frac{2\pi}{5}$ à l'aide d'une expression qui permette la construction du point d'abscisse $cos\ \frac{2\pi}{5}$. Le nombre $\omega = cos\ \frac{2\pi}{5} + i\ sin\ \frac{2\pi}{5}$ est racine du polynôme $X^5 - 1 = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$. On a donc
$$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0 \qquad (1).$$
On vérifie que ω^4 est le conjugué de ω de même ω^3 est le conjugué de ω^2, on a donc $\omega+\omega^4 = 2\ cos\ \frac{2\pi}{5}$ et $\omega^2 + \omega^3 = 2\ cos\ \frac{4\pi}{5}$. La relation (1) nous donne alors
$$2\ cos\frac{2\pi}{5} + 2\ cos\ \frac{4\pi}{5} + 1 = 0 \qquad (2).$$
Considérons le produit $cos\frac{2\pi}{5} \cdot cos\ \frac{4\pi}{5}$. Il est égal à $\frac{1}{2}(cos\frac{6\pi}{5} + cos\ \frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2}(cos\frac{4\pi}{5} + cos\ \frac{2\pi}{5})$. Si p et s désignent la somme et le produit des nombres $cos\ \frac{2\pi}{5}$, $cos\ \frac{4\pi}{5}$ on a alors compte tenu de (2) $s = -\frac{1}{2}$ et $p = -\frac{1}{4}$. Ainsi $cos\ \frac{2\pi}{5}$ et $cos\ \frac{4\pi}{5}$ sont racines de $X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{4} = 0$. En remarquant que $cos\ \frac{4\pi}{5} < 0 < cos\ \frac{2\pi}{5}$, on a $cos\ \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ que l'on peut mettre sous la forme $\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}$. Soit A le milieu du segment $[OI']$, on a $AJ = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Par le cercle de centre A et de rayon AJ, construisons le point B sur (Ox) tel que $\overline{AB} = AJ$. On a alors $\overline{OB} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$. Si C est le milieu de $[OB]$, on a alors $\overline{OC} = cos\frac{2\pi}{5}$. La perpendiculaire en C à (Ox) permet d'obtenir le sommet M_1. A l'aide du compas on reporte alors la corde IM_1 pour obtenir les sommets M_2, M_3, M_4.



Remarque. Grâce à la construction des bissectrices on peut toujours doubler le nombre de côtés d'un polygone régulier. Ainsi à partir du triangle équilatéral on obtient les polygones réguliers à 6, 12, 24, ... côtés. A partir du carré ceux à 8, 16, 32, ... côtés, et à partir du pentagone régulier ceux à 10, 20, 40, ... côtés.

3.2 Le polygone à 15 côtés

Pour la construction du polygone régulier à 15 côtés on utilise la méthode fournie par la démonstration du Lemme 1. Cette méthode consiste, à partir d'une relation de Bezout entre 3 et 5 , à exprimer $\widehat{\frac{2\pi}{15}}$ à l'aide de $\widehat{\frac{2\pi}{5}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{3}}$. On a $2 \times 3 - 5 = 1$ d'où $2\ \widehat{\frac{2\pi}{5}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}} = \widehat{\frac{2\pi}{15}}$.
En utilisant les constructions du triangle équilatéral et du pentagone régulier, on peut construire sur le cercle Γ les points M et N tels que $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = 2\ \widehat{\frac{2\pi}{5}}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}}) = \widehat{\frac{2\pi}{3}}$. On a alors $(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}) = \widehat{\frac{2\pi}{15}}$ et en reportant au compas la corde MN on construit le point P tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}}) = \widehat{\frac{2\pi}{15}}$.



Remarque. A partir du polygone régulier à 15 côtés on peut construire les polygones réguliers à 30, 60, 120, ...côtés. La construction du polygone à 120 côtés fournit la construction de l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{120}}$ qui est l'angle de 3°. Par contre l'angle de 1° n'est pas constructible, nous l'avons déjà signalé dans le chapitre précédent, mais cela résulte aussi du théorème de Gauss puisque le polygone régulier à $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ côtés n'est pas constructible.

3.3 Le polygone à 17 côtés

Nous allons établir ici que le polygone régulier à 17 côtés est constructible en utilisant la méthode que Gauss élabora en 1796.

L'idée de Gauss consiste à exprimer $cos\ \frac{2\pi}{17}$ par une expression où intervient uniquement des opérations algébriques et des extractions de racines carrées portant sur des nombres rationnels.
La méthode de Gauss consiste à:

- classer les racines 17$^{\text{ième}}$ de l'unité (différentes de 1) dans un certain ordre,
- regrouper par "paquets" ces 16 nombres,
- sommer les paquets ainsi construits,
- exprimer les sommes ainsi obtenues comme racines d'équations du second degré.

C'est la même méthode que Gauss utilisa pour démontrer plus généralement que si p est un nombre premier qui est un nombre de Fermat alors $\widehat{\frac{2\pi}{p}}$ est constructible.

3.3.1 Calculs préliminaires

Il y a 16 racines 17$^{\text{ième}}$ de l'unité différentes de 1. Si $\omega = cos\ \frac{2\pi}{17} + i\ sin\ \frac{2\pi}{17}$, ces racines sont $\omega_k := \omega^k$ pour $1 \leq k \leq 16$, ce sont les racines du polynôme

$$\frac{X^{17}-1}{X-1} = X^{16} + X^{15} + \ldots + X + 1. \qquad (1)$$

On classe ces racines dans l'ordre suivant: $\omega, \omega^3, \omega^{3^2}, \omega^{3^3}, \ldots, \omega^{3^{15}}$. Chaque racine est donc la puissance cubique de sa précédente. Il s'avère que par ce procédé on obtient bien une et une seule fois les 16 racines. On le vérifie aisément en calculant les restes modulo 17 des exposants:

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
reste modulo 17 de 3^α	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Les racines sont donc rangées dans l'ordre:

$$\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_9,\ \omega_{10},\ \omega_{13},\ \omega_5,\ \omega_{15},\ \omega_{11},\ \omega_{16},\ \omega_{14},\ \omega_8,\ \omega_7,\ \omega_4,\ \omega_{12},\ \omega_2,\ \omega_6.$$

Ce procédé peut paraître arbitraire. Pourquoi avoir pris les puissances cubiques et non pas les carrées? En fait, 3 est le plus petit exposant qui permet de classer ainsi les racines. Si on avait pris $\omega, \omega^2, \omega^{2^2}, \ldots$ on n'aurait obtenu que 8 racines car $2^8 \equiv 1[17]$.

En prenant une racine sur deux dans la suite et en sommant, on obtient (2):

$$u_1 := \omega_1 + \omega_9 + \omega_{13} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_8 + \omega_4 + \omega_2$$

$$u_2 := \omega_3 + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_6$$

En prenant une racine sur quatre dans la suite et en sommant, on obtient (3):

$$v_1 := \omega_1 + \omega_{13} + \omega_{16} + \omega_4$$

$$v_2 := \omega_9 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_2$$

$$v_3 := \omega_3 + \omega_5 + \omega_{14} + \omega_{12}$$

$$v_4 := \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_6$$

Comme pour $1 \leq k \leq 8$, ω_k et ω_{17-k} sont conjugués, on a

$$\omega_k + \omega_{17-k} = 2\ cos\ \frac{2k\pi}{17}. \qquad (4)$$

Gauss emploie le terme de "périodes" pour désigner les sommes ainsi obtenues: 2 périodes de 8 termes, 4 périodes de 4 termes, 8 périodes de 2 termes. On remarque que dans chaque période figure avec chaque racine sa conjuguée, ainsi les périodes sont des nombres réels. En posant $\theta = \frac{2\pi}{17}$ on a d'ailleurs (5):

$$u_1 = 2\ (cos\ \theta + cos\ 2\theta + cos\ 4\theta + cos\ 8\theta)$$

$$u_2 = 2\ (cos\ 3\theta + cos\ 5\theta + cos\ 6\theta + cos\ 7\theta)$$

$$v_1 = 2\ (cos\ \theta + cos\ 4\theta)$$

$$v_2 = 2\ (cos\ 2\theta + cos\ 8\theta)$$

$$v_3 = 2\ (cos\ 3\theta + cos\ 5\theta)$$

$$v_4 = 2\ (cos\ 6\theta + cos\ 7\theta)$$

Les angles $\theta,\ 2\theta,\ 3\theta, \ldots,\ 8\theta$ sont dans $[0, \pi]$ et la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle. Il en résulte (6):

$$v_2 < v_1$$

$$v_4 < v_3$$

Bien que $8\theta < 0$, on a:

$$u_1 > 0 \qquad (7)$$

car $\theta < \frac{\pi}{3}$, $2\theta < \frac{\pi}{3}$, $4\theta < \frac{\pi}{2}$ et ainsi $\frac{1}{2} < cos\ \theta$, $\frac{1}{2} < cos\ 2\theta$, $0 < cos\ 4\theta$. $u_1 + u_2$ est la somme des 16 racines. D'après (1) en remplaçant X par ω on a

$$u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{16} \omega^i = -1. \qquad (8)$$

A l'aide de (5) effectuons le produit u_1u_2. On obtient:

$$\begin{aligned} u_1u_2 = 4\ (&cos\ \theta\ cos\ 3\theta + cos\ \theta\ cos\ 5\theta + cos\ \theta\ cos\ 6\theta + cos\ \theta\ cos\ 7\theta \\ &+ cos\ 2\theta\ cos\ 3\theta + cos\ 2\theta\ cos\ 5\theta + cos\ 2\theta\ cos\ 6\theta + cos\ 2\theta\ cos 7\theta \\ &+ cos\ 4\theta\ cos\ 3\theta + cos\ 4\theta\ cos\ 5\theta + cos\ 4\theta\ cos\ 6\theta + cos\ 4\theta\ cos 7\theta \\ &+ cos\ 8\theta\ cos\ 3\theta + cos\ 8\theta\ cos\ 5\theta + cos\ 8\theta\ cos\ 6\theta + cos\ 8\theta\ cos 7\theta) \end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante $2\ cos\ a\ cos\ b = cos\ (a+b) + cos\ (a-b)$ on obtient:

$$\begin{aligned} u_1u_2 &= 2\ (cos\ 4\theta + cos\ 2\theta + cos\ 6\theta + cos\ 4\theta + cos\ 7\theta + cos\ 5\theta + cos\ 8\theta + cos\ 6\theta \\ &\quad + cos\ 5\theta + cos\ \theta + cos\ 7\theta + cos\ 3\theta + cos\ 8\theta + cos\ 4\theta + cos\ 9\theta + cos\ 5\theta \\ &\quad + cos\ 7\theta + cos\ \theta + cos\ 9\theta + cos\ \theta + cos\ 10\theta + cos\ 2\theta + cos\ 11\theta + cos\ 3\theta \\ &\quad + cos\ 11\theta + cos\ 5\theta + cos\ 13\theta + cos\ 3\theta + cos\ 14\theta + cos\ 2\theta + cos\ 15\theta + cos\ \theta \\ &= 2\ [(3\ cos\ 4\theta + cos\ 13\theta) + (3\ cos\ 2\theta + cos\ 15\theta) + (2\ cos\ 6\theta + 2\ cos\ 11\theta) \\ &\quad + (3\ cos\ 7\theta + cos\ 10\theta + 4\ cos\ 5\theta + (2\ cos\ 8\theta + 2\ cos\ 9\theta) + 4\ cos\ \theta + (3\ cos\ 3\theta + cos\ 14\theta)] \\ &= 8[cos\ 4\theta + cos\ 2\theta + cos\ 6\theta + cos\ 7\theta + cos\ 5\theta + cos\ 8\theta + cos\ \theta + cos\ 3\theta] \end{aligned}$$

On utilise alors (5) et on obtient:

$u_1u_2 = 4(u_1+u_2)$ et d'après (8) $u_1u_2 = -4$.

On a donc

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = -1 \\ u_1u_2 = -4 \end{cases}.$$

Ainsi u_1 et u_2 sont racines de

$$X^2 + X - 4 = 0 \qquad (9)$$

avec d'après (7) $u_2 < u_1$.

D'après (2) et (3) on a $v_1 + v_2 = u_1$. Comme précédemment calculons v_1v_2 à partir de (5):

$$\begin{aligned} v_1v_2 &= 4\ [cos\ \theta\ cos\ 2\theta + cos\ \theta\ cos\ 8\theta + cos\ 4\theta\ cos\ 2\theta + cos\ 4\theta\ cos\ 8\theta] \\ &= 2[cos\ 3\theta + cos\ \theta + cos\ 9\theta + cos\ 7\theta + cos\ 6\theta + cos\ 2\theta + cos\ 12\theta + cos\ 4\theta] \\ &= 2[cos\ 3\theta + cos\ \theta + cos\ 8\theta + cos\ 7\theta + cos\ 6\theta + cos\ 2\theta + cos\ 5\theta + cos\ 4\theta] \\ &= u_1 + u_2 = -1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = u_1 \\ v_1v_2 = -1 \end{cases}.$$

Ainsi v_1 et v_2 sont racines de

$$X^2 - u_1X - 1 = 0 \qquad (10)$$

avec d'après (6) $v_2 < v_1$.

De même on obtient

$$\begin{cases} v_3 + v_4 = u_2 \\ v_3v_4 = -1 \end{cases}.$$

Ainsi v_3 et v_4 sont racines de

$$X^2 - u_2X - 1 = 0 \qquad (11)$$

avec d'après (6) $v_4 < v_3$.

Nous avons d'après (5) $v_3 = 2\ (cos\ 3\theta + cos\ 5\theta)$ qui s'écrit aussi $v_3 = 4\ cos\ 4\theta\ cos\ \theta$. On a aussi d'après (5) $v_1 = 2\ (cos\ \theta + cos\ 4\theta)$. Il en résulte que $w_1 := 2\ cos\ \theta$ et $w_2 := 2\ cos\ 4\theta$ sont racines de

$$X^2 - v_1X + v_3 = 0 \qquad (12)$$

avec évidemment $w_2 < w_1$.

3.3.2 Première résolution

La résolution successive des équations (9), (10), (11), (12) permet d'obtenir $cos\ \frac{2\pi}{17}$.
L'équation (9) nous donne: $u_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ et $u_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$
L'équation (10) nous donne: $v_1 = \frac{u_1+\sqrt{u_1{}^2+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$
L'équation (11) nous donne: $v_3 = \frac{u_2+\sqrt{u_2{}^2+4}}{2} = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$
L'équation (12) nous donne: $w_1 = 2\ cos\ \frac{2\pi}{17} = \frac{v_1+\sqrt{v_1{}^2-4v_3}}{2}$, d'où

$$cos\ \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}].$$

Voilà l'expression trouvée par Gauss. Puisque l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racines carrée, cette expression montre que $cos\ \frac{2\pi}{17}$ est un nombre constructible, ce qui établit que le polygone régulier à 17 côtés est constructible. En fait, en reprenant les constructions élémentaires données lors de la démonstration du théorème 1 de notre second chapitre, on peut théoriquement construire à la règle et au compas, le point de l'axe (Ox) d'abscisse $cos\ \frac{2\pi}{17}$. Cette méthode serait certainement très fastidieuse et d'ailleurs Gauss lui-même ne s'est pas lancé dans cette construction.

Nous allons maintenant décrire une deuxième résolution effectuée en 1893 par H.W Richmond et qui conduira à une construction très élégante du polygone régulier à 17 côtés.

3.3.3 Deuxième résolution

Pour résoudre (9) on introduit φ appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $tg\ 4\varphi = 4$. On a alors

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{1+tg^2 4\varphi} = \frac{1}{cos\ 4\varphi}$$

et

$$sin\ 4\varphi = 4\ cos\ 4\varphi.$$

$$u_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2}[-1+\frac{1}{cos\ 4\varphi}] = \frac{1-cos\ 4\varphi}{2\ cos\ 4\varphi} = \frac{2(1-cos\ 4\varphi)}{sin\ 4\varphi} = 2\ tg\ 2\varphi \qquad (13)$$

$$u_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} = \frac{-2(1+cos\ 4\varphi)}{sin\ 4\varphi} = -2\ cotg\ 2\varphi \qquad (14)$$

Pour résoudre (10), on a d'après (13) $\sqrt{u_1{}^2+4} = 2\ \sqrt{tg^2\ 2\varphi+1} = \frac{2}{cos\ 2\varphi}$.

$$v_1 = \frac{u_1+\sqrt{u_1{}^2+4}}{2} = tg\ 2\varphi + \frac{1}{cos\ 2\varphi} = \frac{2\ tg\ \varphi}{1-tg^2\varphi} + \frac{1+tg^2\varphi}{1-tg^2\ \varphi} = \frac{(1+tg\ \varphi)^2}{1-tg^2\ \varphi} = \frac{1+tg\ \varphi}{1-tg\ \varphi} = tg\ (\varphi+\frac{\pi}{4}) \qquad (15)$$

$$v_2 = \frac{u_1-\sqrt{u_1{}^2+4}}{2} = tg\ 2\varphi - \frac{1}{cos\ 2\varphi} = -\frac{(1-tg\ \varphi)^2}{1-tg^2\ \varphi} = -\frac{1-tg\ \varphi}{1+tg\ \varphi} = tg\ (\varphi-\frac{\pi}{4}) \qquad (16)$$

Pour résoudre (11), on a d'après (14) $\sqrt{{u_2}^2+4} = 2\ \sqrt{cotg^2\ 2\varphi + 1} = \frac{2}{sin\ 2\varphi}$.

$$v_3 = \frac{u_2 + \sqrt{{u_2}^2+4}}{2} = -cotg\ 2\varphi + \frac{1}{sin 2\varphi} = \frac{1 - cos\ 2\varphi}{sin\ 2\varphi} = tg\ \varphi \qquad (17)$$

$$v_4 = \frac{u_2 - \sqrt{{u_2}^2+4}}{2} = -cotg\ 2\varphi - \frac{1}{sin 2\varphi} = -\frac{1 + cos\ 2\varphi}{sin\ 2\varphi} = -cotg\ \varphi \qquad (18)$$

D'après (5) et (17) on a

$$2\ (cos\ 3\theta + cos\ 5\theta) = tg\ \varphi. \qquad (19)$$

D'après (5) et (16) on a $2\ (cos 2\theta + cos\ 8\theta) = tg\ (\varphi - \frac{\pi}{4})$ qui s'écrit aussi:

$$4\ cos\ 3\theta\ cos\ 5\theta = tg\ (\varphi - \frac{\pi}{4}). \qquad (20)$$

3.3.4 La construction de Richmond

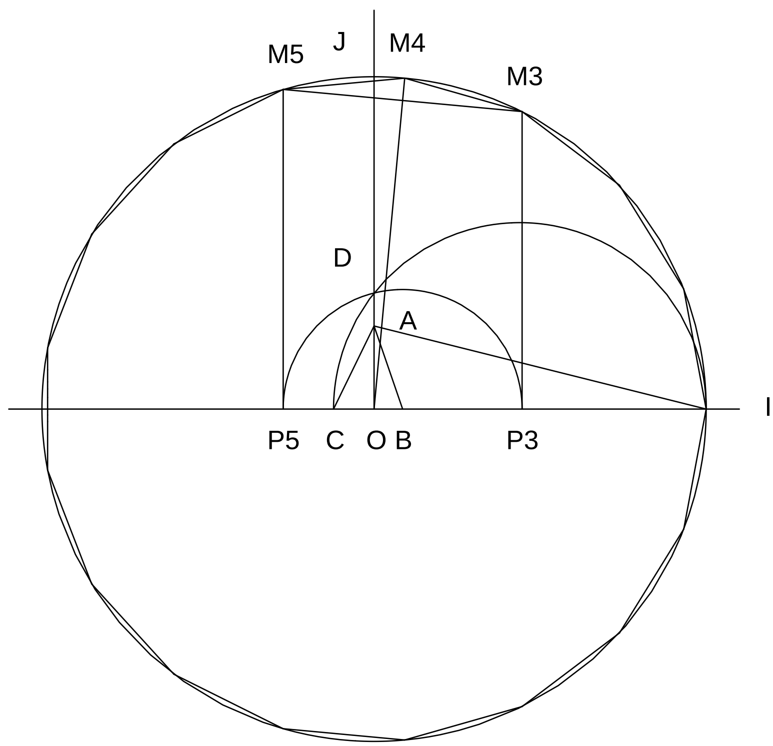
Soit A le point de (Oy) tel que $\overline{OA} = \frac{1}{4}$. Soit B le point de (Ox) (d'abscisse positive) tel que $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$. On obtient B en traçant deux bissectrices. Soit C le point de (Ox) (d'abscisse négative) tel que $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$. On obtient C en traçant la perpendiculaire à la droite (AB) et en traçant une bissectrice. Le cercle de diamètre CI coupe (Oy) en D (d'ordonnée positive). Le cercle de centre B passant par D coupe (Ox) en deux points notés P_3 (d'abscisse positive) et P_5 (d'abscisse négative). Les perpendiculaires en P_3 et P_5 à (Ox) coupent le demi-cercle Γ supérieur en M_3 et M_5. Nous avons $tg\ \widehat{OAI} = 4$ donc $\widehat{OAI} = 4\varphi$ et $\widehat{OAB} = \varphi$.

$$2\ (cos\ \widehat{IOM_3} + cos\ \widehat{IOM_5}) = 2\ (\overline{OP_3} + \overline{OP_5}) = 2\ (\overline{OB} + \overline{BP_3} + \overline{OB} + \overline{BP_5}) = 4\ \overline{OB} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = tg\ \varphi \qquad (21)$$

$$4\ cos\ \widehat{IOM_3} \cdot\ cos\ \widehat{IOM_5} = 4\ \overline{OP_3} \cdot\ \overline{OP_5} = -4OD^2 = 4\ \overline{OC}\ \cdot\ \overline{OI} = 4\ \overline{OC} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = tg\ (\varphi - \frac{\pi}{4}) \qquad (22)$$

Les relations (19) et (20) comparées aux relations (21) et (22) nous donnent $\widehat{IOM_3} = 3\theta$ et $\widehat{IOM_5} = 5\theta$ avec $\theta = \frac{2\pi}{17}$.

Ainsi les points M_3 et M_5 sont le $3^{\text{ième}}$ et le $5^{\text{ième}}$ sommets d'un polygone régulier à 17 côtés dont I est le $17^{\text{ième}}$ sommet. La médiatrice du segment M_3M_5 coupe alors le cercle Γ en M_4 qui est le $4^{\text{ième}}$ sommet du polygone. En reportant au compas la corde M_3M_4 on obtient tous les sommets.



3.4 Autres polygones réguliers constructibles

Nous avons envisagé les nombres premiers de Fermat 3, 5, 17, nous en connaissons encore deux autres 257, 65 537 pour lesquels les polygones réguliers correspondants sont constructibles. Mais le fait de savoir que ces polygones sont constructibles est une chose et en donner une construction en est une autre. Signalons toutefois que en 1832 F.J Richelot publia une construction pour 257. En ce qui concerne 65 537, F. Klein signale que le professeur Hermes consacra plusieurs années vers 1890 à étudier la méthode de Gauss dans ce cas particulier. Il ne semble pas qu'il soit parvenu à une construction présentable du polygone régulier ̀65 537 côtés. D'ailleurs on peut s'interroger sur l'intérêt que pourrait présenter une telle construction.

Revenons au polygone régulier à 17 côtés. On peut bien sûr doubler le nombre de ses côtés mais on peut aussi construire les polygones réguliers ayant: $3 \times 17 = 51$, $5 \times 17 = 85$, $3 \times 5 \times 17 = 255$ côtés.
Pour 51, par exemple, on part d'une relation de Bezout entre 3 et 17, par exemple $6 \times 3 - 17 = 1$ et on obtient: $6\ \widehat{\frac{2\pi}{17}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}} = \widehat{\frac{2\pi}{51}}$. Ceci permet la construction de l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{51}}$ à partir des angles $\widehat{\frac{2\pi}{17}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{3}}$.
Pour 85, la même méthode donne $7 \times 5 - 2 \times 17 = 1$ et $7\ \widehat{\frac{2\pi}{17}} - 2\ \widehat{\frac{2\pi}{5}} = \widehat{\frac{2\pi}{85}}$.
Pour 255, en utilisant les deux relations précédentes ainsi que $\widehat{\frac{2\pi}{15}} = 2\ \widehat{\frac{2\pi}{5}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}}$, on obtient facilement $\widehat{\frac{2\pi}{255}} = 8\ \widehat{\frac{2\pi}{17}} - 4\ \widehat{\frac{2\pi}{5}} + \widehat{\frac{2\pi}{3}}$.