Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques et Informatique

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGÈBRE LINÉAIRE

Cours Elisabeth Remm

Contrôle Continu Intermédiaire : durée 2heures

Espaces vectoriels, Applications linéaires

Les calculatrices, ordinateurs et téléphones portables sont interdits.
Laisser tous ces matériels dans le sac.

Tout résultat doit être justifié. La rédaction sera prise en compte.

Questions de cours. Soient E et F des espaces vectoriels réels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

(1) Donner la définition d'une application linéaire.

(2) Donner la définition de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

(3) Quelle relation y-a-t-il entre les dimensions de $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ et $\dim E$?

Exercice 1.

(1) Montrer que le sous-ensemble $E = \{(x, x+y, y, x-2y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2) Est-ce que le sous-ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que } xy = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? On justifiera la réponse.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application donnée par son expression analytique

$$f(x, y) = (x - 2y, x + y, -3x + y, -2x + 3y).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Ecrire sa matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

(3) Déterminer son noyau. Cette application est-elle injective ?

(4) Quel est le rang de f. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et un supplémentaire de cet espace dans $\mathbb{R}^4$.

(5) Les espaces $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont-ils en somme directe ?

TOURNER LA PAGE

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}.$$

(1) Ecrire la matrice de f relative à la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$.

(2) Soit $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ecrire l'expression analytique de $f(\overrightarrow{X})$.

(3) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs dont les composantes dans la base canonique sont

$$\overrightarrow{U} = (-1, 1, -1),\ \overrightarrow{V} = (0, 2, 1),\ \overrightarrow{W} = (2, -3, -1).$$

(1) La famille $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(2) Ecrire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ de la base canonique dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.

(3) Soit $\overrightarrow{X} = (1, 1, 1)$. Ecrire les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.

(4) Donner la matrice de l'application f de l'Exercice 3 dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.