CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 9-10

Chaines de Markov. Exercices

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(1) Donner la définition d'une chaîne de Markov.

(2) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

(3) Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.

(4) Déterminer le(s) états transitoires.

(5) Donner la période de chaque élément de E.

(6) Vérifer que si X_0 suit une loi uniforme sur $\{4; 5\}$, X_1 également.

Exercice 2 On considère une chaîne de Markov à quatre états $\{1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Tracer le graphe associé à cette chaîne de Markov.

(2) Montrer que les états 3 et 4 sont absorbants. Les autres sont-ils transitoires ou récurents ?

(3) Soit (p_0, q_0, r_0, s_0) les probabilités initiales de chaque état. Calculer

$$P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 3, \cdots, X_n = 3, \cdots)$$

et

$$P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 4, X_3 = 4, \cdots, X_n = 4, \cdots).$$

(4) On considère la trjectoire donnée par $X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 2$ si n est impair. Montrer que cette trajectoire est de longueur infinie et de probabilité nulle.

(5) On suppose que la répartition entre les quatre états est uniforme á l'instant initial $t = 0$. Calculer la répartition á l'instant $t = 1$ puis à l'instant $t = 2$.

(6) Même question si l'on part d'une distribution initiale $\pi_0 = (0.5, 0.5, 0, 0)$.

(7) Montrer que toute distribution de la forme $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$ avec $r_0 + s_0 = 1$ est stationnaire. En existe-t-il d'autres ?

Exercice 3 Evolution des écosystèmes méditerranéens.

A l'origine la forêt méditerranéenne, située sur de la roche calcaire à faible altitude, était très essentiellement composée de chênes. Mais ces forêts primitives ont été éradiquées pour leur substituer des vignes ou des vergers également abandonnés par la suite au profit de prés pour la pature. Mais cette activité agricole a peu à peu disparu ce qui a favorisé le développement tout d'abord d'une garrigue et ensuite d'une autre espèce de forêt essentiellement dominée par le pin d'Alep au lieu de la chainée primitive. . Or ces nouvelles forets sont hautement inflammables. Elles subissent régulièrement le passage du feu (incendies volontaires ou non) et sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Cette évolution peut être modélisé par une chaîne de Markov à cinq états : C (Chênaie),V (vigne ou verger) ,Pr (Prés), Ga (Garrigue) , Pi (Pinède). On envisage tout de même de nos jours une évolution de cette pinède vers de la chaînée.

(1) Dessiner le graphe associé à cette chaîne à cinq états $\{C, V, Pe, Ga, Pi\}$.

(2) La matrice de transition Q est

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 0.25 & 0 & 0.65 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il des états absorbants, des états périodiques ?

(3) Calculer, en utilisant un logiciel de calcul matriciel, les puissances successives de Q, si possible calculer Q^{40}.

(4) En déduire l'existance d'un état stationnaire.

Exercice 4. Développement d'un organisme.

L'observation du développement d'un organisme (animal ou plante) au cours du temps fait apparaître l'ensemble des états suivants :

— J : juv 'enile
— M : maturité sexuelle
— S : sénescence
— D : décés

La matrice de transition est

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.55 & 0.15 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Tracer le diagramme associé. La chaîne est-elle irréductible ?

(2) Calculer la probabilité de passer en deux étapes de l'état de maturité sexuelle à létat de sénescence.

(3) Calculer la matrice Q^2 et vérifier la probabilité calculée à la question 2. La chaîne est-elle périodique ?

(4) Pour chaque état, indiquer s'il est absorbant, transitoire, récurrent.

Exercice 5. Le magicien d'Oz.

Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut- être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige. Et si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas. Les habitants se sont plaint auprès du magicien, affirmant que, ce faisant, ils n'ont qu'un beau jour sur cinq, ce à quoi il a répondu qu'il s'agit d'une impression mais qu'en réalité il y a bien plus d'un beau jour sur cinq. Qu'en est-il ? Pour le savoir, on se propose de modéliser l'évolution du climat au pays d'Oz par une chaîne de Markov à 3 états, $\{P, B, N\}$ (pour Pluvieux, Beau, et Neigeux) dont la matrice de transition est, selon la description précédente :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(1) L'un coefficient de Q est nul. Expliquer pourquoi.

(2) Calculer la probabilité d'une trajectoire (succession de jours) du type $BNPB$ en fonction de $\pi_0(B)$. Donner un exemple de trajectoire de probabilitée nulle.

(3) On a calculé le carré de Q et on a trouvé

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & ? & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

Compléter le coefficient manquant, en expliquant comment le calculer.

(4) Donner la probabilité que le surlendemain d'un jour neigeux soit neigeux.

(5) Le calcul des puissances successives de la matrice Q montre qu'à partir de la puissance sixième elles restent pratiquement inchangées et égales à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

En déduire une distribution stationnaire et vérifier par un calcul direct.

(6) En déduire la réponse à la question initiale : qui du magicien ou de la population du pays d'Oz a la bonne estimation du nombre de jours de beau temps ? Expliquer.

Exercice 6 On considère le graphe de transition suivant, et on va analyser la chaîne de Markov homogène correspondante.

(1) Décrire l'espace des états et écrire la matrice de transition

(2) La chaîne de Markov comporte combien de classes et quelles sont- elles ?

(3) Quelles sont les caractéristiques de chacune de ces classes (stable ou instable, absorbante, récurrente ou transitoire, la période) ?

(4) Existe-t-il une loi stationnaire ? Si oui, qu'elle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

(5) Déterminez, s'il y a lieu, les probabilités d'absorbtion dans les classes stables.

(6) Déterminez, s'il y a lieu, les temps moyens d'absorbtion dans les classes stables.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "0{,}25"] \arrow[d, "0{,}75"'] & E_2 \arrow[loop right] \\ E_4 \arrow[loop left] & E_3 \arrow[l, "0{,}75"'] \arrow[u, "0{,}25"'] \end{tikzcd}$$

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble $E = \{1;2;3;4;5\}$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(1) Donner la définition d'une chaine de Markov.

(2) Interpréter la matrice de transition.

(3) Dessiner le graphe de cette chaine.

(4) Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaine.

(5) Donner la période de chaque élément.