CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique : Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

EXERCICES CORRIGES chapitre 2-chapitre 3

Exercice 1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair lors d'un lancer de dé (équilibré)

Solution. Ici l'espace Ω est l'ensemble des résultats associés :'a un lancer d'un dé, soit

$$\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

On s'intéresse à l'évènement $A \in \mathcal{P}(A)$ correspondant à "obtenir un nombre pair." Ainsi

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Comme nous supposons que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite, c'est-à-dire on associe la même probabilité à tous les évènements élémentaires, alors

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Ainsi

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

(1) Quelle est la probabilité d'avoir quatre as ?

(2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?

Solution. Ici Ω est l'ensemble des mains à cinq éléments. Cela correspond aux combinaisons de 5 éléments dans un ensemble de 32 éléments. On a donc

$$\mathrm{card}(\Omega) = \binom{32}{5}.$$

(1) On pose l'hypoyhèse d'équiprobabilité sur Ω. Définissons l'évènement A. Un élémenr de A est une main comprenant 4 as et une autre carte quelconque parmi les 28 qui restent. Ainsi

$$\mathrm{card}(A) = \binom{4}{4}\binom{28}{1} = \binom{28}{1} = 28.$$

On en déduit

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 0,00014.$$

(2) L'évènement B est "tirer au moins un as". Son contraire, $\overline{B}$ correspondant au complémentaire de B dans Ω, soit $\complement_\omega B$ correspond à "tirer une main sans as. Son cardinal est plus facile à calculer que celui de B. Il correspond au nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 28, le nombre de cartes sans les as.

$$\mathrm{card}(\overline{B}) = \binom{28}{5}$$

et donc

$$\mathrm{card}(B) = 1 - \binom{28}{5}$$

On en déduit

$$P(B) = \frac{\mathrm{card}(B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{-\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} \simeq 0,51.$$

Exercice 3.Une urnee contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

(1) On tire successivement deux boules sans remise. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit égale à 5.

(2) On tire simultanément deux boules. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit égale à 5.

(3) On tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit égale à 5.

Solution.

(1) Dans ce cas, le résultat est une paire d'entiers (i, j) avec $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 5$ et $i \neq j$. On en déduit

$$\mathrm{card}(\Omega) = 5^2 - 5 = 20.$$

L'évènement A est "la somme des points est 5. On a donc

$$A = \{(1,5), (2,3), (3,2), (4,1)\}.$$

Ainsi

$$\mathrm{card}(A) = 4$$

et

$$P(A) = \frac{4}{20} = 0,2.$$

(2) Si les deux boules sont tirées simultanément, l'ensemble Ω correspond aux combinaisons 2 à 2 de 5 éléments. Ainsi, dans ce cas

$$\mathrm{card}(\Omega) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Mais si B est l'évènement "la somme des points est 5", on a dans ce cas

$$B = \{(1,4), (2,3)\}.$$

car les évèments élémentaires $(1, 4)$ et $(4, 1)$ sont les mêmes au niveau des combinaisons (Ω est ici un ensemble de combinaisons). On en déduit que dans ce cas

$$P(B) = \frac{2}{10} = 0,2.$$

(3) Dans le cas du tirage avec remise, le résultat est une paire d'entiers (i, j) avec $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 5$ mais ici on n' a pas $i \neq j$. Ansi
$$\text{card}(\Omega) = 5^2 = 25.$$
L'évènement C est "la somme des points est 5. On a donc
$$C = \{(1,5), (2,3), (3,2), (4,1)\}.$$
Ainsi
$$\text{card}(C) = 4$$
et
$$P(C) = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Exercice 4. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement deux boules sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit 5 sachant que la première boule a le numéro 1 ?

Solution. Soit A l'évèment "la première boule a le numéro 1" et B l'évènement "la somme des numéros obtenus soit 5". La probabilité cherchée est la probabilité conditionnelle
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$
On a
$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$$
et donc
$$\text{card}(A) = 4.$$
$$A \cap B = \{(1,4)\}.$$
Comme $\text{card}(\Omega) = 20$ (voir exercice précédent),
$$P(A) = \frac{4}{20}.$$
et
$$\text{card}(A \cap B) = 1$$
et
$$P(A \cap B) = 120.$$
D'où
$$P(B/A) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Exercice 5. Une usine de composants électriques fabrique 4 types de composants et les stocke dans 4 compartiments. Le premier compartiment contient 2000 interrupteurs, le deuxième 1000 prises le troisième 1000 disjoncteurs et le dernier 500 douilles. On estime que 10 pour 100 des interrupteurs, des disjoncteurs et des prises sont défectueux et que 20 pour cent des douilles sont défectueuses. On prélève au hasard un composant dans un des compartiments.

(1) Trouver la probabilité pour que le composant choisi soit défectueux.

(2) Si le composant choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du quatrième compartiment ?

Solution.

(1) Comme il y a 4 compartiments C_1, C_2, C_3, C_4, la probabilité d'ouvrir un compartiment est $0,25$. La probabilité pour qu'un composant pris dans un compartiment donné soit défectueux est égal au quotient du nombre de défectueux sur le nombre total d'éléments dans le compartiment donné. Soient In l'évènement d'être un interrupteur défectueux, Pr pour prise défectueuse, Di pour disjoncteur défectueux et Do pour douille défectueuse. On a donc, si on note C_i les compartiments

$$P(In/C_1) = \frac{200}{2000} = 0,1 = P(Pr/C_2) = P(Di/C_3),\ \ P(Do\mathbb{C}_4) = 0,2.$$

On en déduit que la probabilité cherchée est, si D désigne l'évènement "être défectueux :

$$P(D) = P(In/C_1)\times 0,25 + P(Pr/C_2)\times 0,25 + P(Di/C_3)\times 0,25 + P(Do\mathbb{C}_4)\times 0,25) = 3\times 0,1\times 0,25 + 0,2\times 0,25$$

(2) On a

$$P(D) = 0,125, \quad P(D/C_4) = 0,2, \quad P(C_4) = 0,25.$$

Ainsi la probabilité d'être du quatrième compartiment C_4 sachant que le composant est défectueux est

$$P(C_4/D) = \frac{P(C_4 \cap D)}{P(D)}.$$

Mais

$$P(D/C_4) = 0,2 = \frac{P(C_4 \cap D)}{P(C_4)} = \frac{P(C_4 \cap D}{0,25}$$

on déduit

$$P(C_4 \cap D) = 0,2 \times 0,25 = 0,05.$$

D'où

$$P(C_4/D) = \frac{P(C_4 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,05}{0,125} = 0,4.$$

Exercice 6. **Un exercice pour ces temps de grippe. Le quart d'une population a été vacciné contre la grippe. Au cours de l'épidémie actuelle, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour neuf non vaccinés.**

(1) Les évènements "avoir été vacciné" et "être tombé malade" sont-ils indépendants ?

(2) Au cours de cette épidémie, il y a un malade sur douze parmi les vaccinés. Quel était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?