CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 6

Fonctions d'une variable aléatoire

1. Changement de variable aléatoire

Une variable aléatoire X étant donnée sur un espace probabilisé, il est parfois nécessaire de lui associer une seconde variable aléatoire Y (par exemple $Y = X^2$). Ceci s'appelle un changement de variable aléatoire.

1.1. **Définition.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilité et

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

une variable aléatoire sur cet espace. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction d'une variable réelle.

Définition 1. *Etant données une variable aléatoire X sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, on définit une autre variable aléatoire sur cet espace par*

$$Y = g(X)$$

c'est-à-dire définie par

$$Y(\omega) = g(X(\omega))$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer que Y est une variable aléatoire. Si X est une variable aléatoire finie, et si $x_1, \cdots, x_s$ sont les valeurs de X, alors Y est aussi une variable aléatoire finie prenant comme valeurs $g(x_1), \cdots, g(x_s)$. Dans le cadre continu, cela n'est pas si simple. On va s'y intéresser dans le paragraphe suivant.

1.2. **Cas où X est continue.** Rappelons que si X est une variable aléatoire continue sur Ω, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$

(condition toujours réalisée dans le cadre fini). Ainsi $g(X)$ est une variable aléatoire continue si

$$g(X)^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, g(X(\omega)) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Evidemment cette condition ne peut être réalisée pour des fonctions g quelconques. Soit

$$A_g(y) = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq y\}.$$

Il est clair que

$$g(X(\omega)) \leq y$$

si et seulement si

$$X(\omega) \in A_g(y).$$

Nous supposerons donc qu'au moins g vérifie les propriétés suivantes :

(1) L'ensemble $A_g(y)$ doit être une réunion ou intersection d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles.

(2) Les évènements $\{g(X) = \pm\infty\}$ soient négligeables.

Pour être sûrs que ces conditions soient réalisées, nous supposerons que g est continue et même dérivable. Dans ce cas Y est bien une variable aléatoire continue, sa loi est donnée par

$$P_Y(]-\infty, y]) = P(\{\omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leq y\} = P(\{\omega \in \Omega,\ g(X)(\omega) \leq y\}$$

et la fonction de répartition

$$F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

1.3. **Exemples.** 1. Supposons que la fonction g soit bornée, c'est-à-dire, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que

$$a \leq g(x) \leq b.$$

Dans ce cas, on aura

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq b, \\ 0 & \text{si } y < a. \end{cases}$$

Prenons par exemple une fonction dont le graphe est donné dans la Figure 1.

Dans cet exemple, $g(x) \leq y_1$ si et seulement si $x \leq x_1$. Ainsi

$$F_Y(y_1) = P(Y \leq y_1) = P(X \leq x_1) = F_X(x_1).$$

Par contre $g(x) \leq y_2$ si et seulement si $x \in [x_3, x_4] \bigcup]-\infty, x_2]$. On a donc

$$F_Y(y_2) = P(x_3 \leq X \leq x_4) + P(X \leq x_2) = F_X(x_2) + F_X(x_4) - F_X(x_3).$$

2. $g(x) = 2x - 2$ (voir Figure 2).

$$F_Y(y) = P(Y \leq 2x - 2) = P(X \leq \frac{y+2}{2})$$

et donc

$$F_Y(y) = F_X(\frac{y+2}{2}).$$

3. $g(x) = x^2$ (voir Figure 3). Il est clair que si $y < 0$ alors $F_Y(y) = 0$. Par contre, si $y \geq 0$, alors

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

2. Densité de probabilité, espérance de $Y = g(X)$

2.1. **Densité de probabilité.** Nous allons supposer dans un premier temps que g est bijective. Ceci signifie qu'à un élément $x \in \mathbb{R}$ est associé un élément $y = g(x)$. On suppose de plus que g est dérivable et que la dérivée ne s'annule pas. On a alors, si g est croissante ($g' > 0$)

$$F_Y(y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X \circ g^{-1}(y)$$

et si g est décroissante

$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X \circ g^{-1}(y).$$

La densité de la fonction Y est donc

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \pm(F_X \circ g^{-1}(y))' = \pm\frac{f_X(x)}{g'(x)}.$$

Supposons à présent que g ne soit pas bijective. Alors pour y donné, l'équation $g(x) = y$ a plusieurs solutions et l'on a :

Proposition 1. *Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ les racines de $y = g(x)$, y donné, c'est-à-dire*

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_n) = \cdots$$

Alors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \cdots$$

Exemple. Prenons $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. L'équation $y = ax + b$ n'a qu'une seule solution $x = \dfrac{y-b}{a}$. Comme $g'(x) = a$, on a

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a}).$$

2.2. **Espérance.** Nous savons que l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy.$$

Soit $Y = g(X)$ et supposons que que $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$. Alors

$$y f_Y(y) = g(x_1) f_X(x_1) + g(x_2) f_X(x_2).$$

On en déduit

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Ceci est encore vrai dans le cas général

Proposition 2. *Soit $Y = g(X)$ où g est dérivable et la dérivée ne s'annule pas. Alors l'espérance de Y est*

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

3. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé. L'exponentielle complexe de X est la variable aléatoire

$$Y = exp(iX) = e^{iX}.$$

Rappelons que l'exponentienne complexe est la fonction d'une variable réelle à valeurs complexes :

$$exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Ainsi

$$Y = \cos X + i \sin X.$$

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire. Sa fonction caractéristiqe est l'espérance de l'exponentielle complexe de X :*

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin itX).$$

La fonction caratéristique d'une variable aléatoire joue un rôle primordial car elle caractérise entièrement la loi de probabilité de cette variable.

Ainsi, dans le cas d'une variable aléatoire à densité, la fonction caractéristique est la transformée de Fourier inverse (à un facteur 2π près dans l'exponentielle suivant la convention) de la densité. En effet si f_X est la densité de X, alors l'espérance de X de densité f est d'après la proposition ci-dessus

$$E(e^{iX}) = ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f_X(x) dx.$$

On en déduit

$$\varphi_X(t) = ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

C'est bien, à un facteur près la transformée de Fourier de f. Rappelons que si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{F}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x) dx.$$

EXERCICES

Exercice 1. On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(1) Déterminer la fonction de répartition.

(2) Calculer l'espérance et l'écart-type.

(3) Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : la probabilité que le phénomène dure au moins $s+t$ heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

Donner des exemples de tels phénomènes.