CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Cours Michel GOZE- Elisabth REMM

Chapitre 2

L'algorithme du simplexe

1. Résolution théorique d'un programme canonique

1.1. **Programme linéaire canonique.** On appelle programme linéaire canonique tout problème de programmation linéaire qui s'énonce sous la forme suivante :

Trouver n nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positifs ou nuls qui maximisent la forme linéaire, appelée objectif,

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

et qui sont soumis aux contraintes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n \leq b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n \leq b_2, \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n \leq b_m, \end{array} \right.$$

avec $m < n$ et *$b_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \cdots m$.*

Pour simplifier l'écriture, utilisons une présentation matricielle : soient les vecteurs

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

et la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On fera attention à la taille de chacune de ces matrices. Sous forme matricielle, le programme s'écrit :

Trouver n nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positifs ou nuls qui maximisent la forme linéaire

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

et qui sont soumis aux contraintes suivantes

$$\mathbf{A}.\mathbf{X} \leq \mathbf{B}$$

1.2. **Passage à une écriture standard.** Le but est de remplacer le système d'inéquations par un système d'équations en rajoutant de nouvelle variables positives, appelées variables d'écart, notées

$$e_1, \cdots, e_m$$

en se basant sur la remarque qu'une inéquation $x \leq b$ avec x et b positifs est équivalente à $x + e = b$ où e est une nouvelle variable positive dite variable d'écart. Ainsi le système

$$\mathbf{A}.\mathbf{X} \leq \mathbf{B}$$

est équivalent au système linéalre

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n + e_1 = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n = +e_2b_2, \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n + e_m = b_m, \end{cases}$$

avec $m < n$ et $b_i \geq 0$ et $e_i \geq 0$ *pour tout* $i = 1, \cdots m$. Ce dernier système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\widetilde{\mathbf{A}}.\widetilde{\mathbf{X}} \leq \mathbf{B}$$

avec

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}, Id_m)$$

qui est donc une matrice de taille $(n+m, m)$ et

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \\ e_1 \\ \cdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

Les composantes de $\widetilde{\mathbf{X}}$ sont positives ou nulles et la fonction à optimiser est toujours

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Ainsi le programme canonique s'écrit sous forme matricielle standard :

Trouver n nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positifs ou nuls qui minimisent la forme linéaire

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

et qui sont soumis aux contraintes suivantes

$$\widetilde{\mathbf{A}}.\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}$$

Exemple On considère le programme canonique : Trouver le maximum de la fonction linéaire

$$x_1 + 2x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

et

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4. \end{cases}$$

Introduisons les trois variables d'écartt e_1, e_2, e_3 toutes les trois positives de manière à présenter ce programme sous forme standard : Trouver le maximum de la fonction linéaire

$$x_1 + 2x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$$

et

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + e_1 = 6, \\ -x_1 + x_2 + e_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + e_3 = 4. \end{cases}$$

La matrice de ce dernier système linéaire est donc

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. **Interprétation géométrique des solutions d'un programme canonique.** Considérons p points du plan $\mathbb{R}^m$ que l'on écrit comme des vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \cdots \\ v_{m,1} \end{pmatrix}, \cdots, V_p = \begin{pmatrix} v_{1,p} \\ v_{2,p} \\ \cdots \\ v_{m,p} \end{pmatrix}.$$

On appelle combinaison linéaire convexe tout point V qui s'écrit

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_p V_p$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, p \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1 \end{cases}$$

Une partie C du plan $\mathbb{R}^m$ est dite convexe si étant donnée deux points V_1 et V_2 appartenant à C, alors toute combinaison linéaire convexe $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$ apparient aussi à C. Par exemple un disque dans le plan est un ensemble convexe. On va s'intéresser aux points extrêmes, c'est-à-dire aux points qui ne peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire convexe de deux autres points du domaine. Par exemple, les points du cercle, bord d'un disque sont tous extrêmes et dans ce cas il y en a une infinité. On ne va s'intéresser qu'aux domaines convexes n'ayant qu'un nombre fini de points extrêmes, c'est-à-dire aux polyèdres convexes. Un simplexe est un polyèdres convexes de $\mathbb{R}^m$ ayant $m+1$ points extrêmes. Ceci explique le titre de ce chapitre.

Proposition 1. *L'ensemble des solutions d'un programme linéaire canonique est un ensemble convexe (éventuellement vide) et la fonction objectif atteint son maximum sur des points extrêmes.*

Ainsi nous sommes amenés à évaluer la fonction objectif sur chacun des points extrêmes.

1.4. **Passage d'un point extrême à un autre.** Considérons le système canonique écrit sous forme standard

$$\widetilde{\mathbf{A}}.\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}$$

Il est clair que le point $(x_1 = 0, \cdots, x_n = 0, e_1 = b_1, \cdots, e_m = b_m)$ est une solution et correspond à un point extrême. En ce point la valeur de l'objectif est 0. Nous allons chercher une procédure pour passer de ce point à un autre point extrême, pour le moment sans regarder l'évolution de la fonction objectif.

Considérons la matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$ et notons $V_1, \cdots, V_n, V_{n+1}, \cdots, V_{n+m}$ les vecteurs colonnes de cette matrice. Nous pouvons réécrire le programme sous la forme

$$x_1V_1 + \cdots + x_nV_n + e_1V_{n+1} + \cdots + e_mV_{n+m} = \mathbf{B}.$$

A la solution initiale choisie $(x_1 = 0, \cdots, x_n = 0, e_1 = b_1, \cdots, e_m = b_m)$ qui est un point extrême, faisons correspondre les vecteurs colonnes de la matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$ correspondant aux cordonnées positives strictement de ce point extrême. Il s'agit ici des vecteurs $V_{n+1}, \cdots, V_{n+m}$. La matrice $(V_{n+1} \cdots V_{n+m})$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

elle est donc inversible. Ceci va être le cas pour tous les points extrêmes :

Proposition 2. *S'il existe un ensemble de n vecteurs indépendants , $V_{i_1}, \cdots, V_{i_n}$ tels que*

$$\xi_{i_1}V_{i_1} + \cdots + \xi_{i_n}V_{i_n} = \mathbf{B}$$

(dans cette écriture on a posé $e_1 = \xi_{n+1}, \cdots, e_m = \xi_{n+m}$), alors le point dont les coordonnées sont nulles sauf $x_{i_j} = \xi_{i_j}$ pour $j = 1, \cdots, n$ est un point extrême. Inversement si on a un point extrême, les vecteurs correspondants aux coordonnées positives forment un système de vecteurs indépendants.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent. On a le programme canonique

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + e_1 = 6, \\ -x_1 + x_2 + e_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + e_3 = 4. \end{cases} \\ Max(x_1 + x_2) \end{array}$$

La matrice associée est

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les points correspondant aux trois vecteurs "de base"

$$V_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ V_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ V_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

sont les trois points

$$(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = ((0,0,1,0,0,),(0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,1).$$

Ces trois points sont des points extrêmes. Notons qu'en chacun de ces points la fonction économique $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ est nulle.

Le but de l'algorithme qui va suivre est, à partir d'une telle solution, de "sauter" d'un point extrême à un autre tout en faisant augmenter (on cherche un Max) la valeur de la fonction économique.

Regardons, tout d'abord, comment sauter d'un point extrême à un autre sans se préoccuper de la fonction économique. Nous avons vu que le programme canonique se présente sous la forme :

$$\widetilde{\mathbf{A}}.\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}$$

avec

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}, Id_m)$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ecrivons cela sous la forme du tableau suivant

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	e_1	e_2	$\cdots$	$\cdots$	e_m	B
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	1	0	$\cdots$	$\cdots$	0	b_1
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	0	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b_i
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	1	b_m

On voit bien que les m dernières colonnes correspondent à un point extrême. Pour passer à une autre point extrême, il faut substituer un vecteur de base, c'est-à-dire un des derniers m vecteurs colonnes, nous verrons lequel par, pour le moment on choisit qui on veut, mais cette liberté n'est que passagère, par exemple le premier vecteur colonne correspondant à x_1.

Dans ce cas quel est le vecteur de base qui entre dans la substitution ?

Procédure de substitution. Comme nous avons choisi le premier vecteur colonne, étudions les rapports

$$b_1/a_{1,1}, b_2/a_{2,1}, \cdots, b_{m-1}/a_{m-1,1}, b_n/a_{m,1}$$

mais en ne considérant que les coefficients $a_{i,1}$ strictement positif correspondant aux rapports des composantes respectives du vecteur $\mathbf{B}$ avec le premier vecteur colonne choisi. Cherchons le plus petit de ces rapports. Soit j tel que

$$b_j/a_{j,1} = Min(b_1/a_{1,1}, b_2/a_{2,1}, \cdots, b_{m-1}/a_{m-1,1}, b_n/a_{m,1}).$$

On va donc enlever de la base le vecteur

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où le 1 est à la j-ème place (et donc correspondant à la variable e_j et le remplacer par le premier vecteur colonne, que l'on va écrire en utilisant le pivot sous la forme du vecteur de base "enlevé". Comment procéder :

(1) On divise toute la j-ème ligne par $a_{j,1}$, qui d'après notre hypothèse sur le choix de ces coefficients est strictement positif.

(2) En utilisant le pivot de Gauss, ramener tous les autres coefficients $a_{i,1}, i \neq j$ à 0. Pour cela, si on note par L_i la ligne numéro i du nouveau tableau(celui obtenu après la division de la première étape, on remplacera la ligne L_i par $L_i - a_{i,1}L_j$ et ceci pour $i = 1, \cdots, m$ et $i \neq j$.

Le nouveau tableau aura la forme suivante

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	e_1	e_2	$\cdots$	e_j	$\cdots$	e_m	B
0	$a'_{1,2}$	$\cdots$	$a'_{1,n-1}$	$a'_{1,n}$	1	0	$\cdots$	$-a_{1,1}/a_{j,1}$	$\cdots$	0	b'_1
0	$a'_{2,2}$	$\cdots$	$a'_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	0	1	$\cdots$	$-a_{2,1}/a_{j,1}$	$\cdots$	0	b'_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b'_i
1	$a_{j,2}/a_{j,1}$	$\cdots$	$a_{j,n-1}/a_{j,1}$	$a_{j,n}/a_{j,1}$	0	0	$\cdots$	$1/a_{j,1}$	$\cdots$	0	$b_j/a_{j,1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b'_k
0	$a'_{m,2}$	$\cdots$	$a'_{m,n-1}$	$a'_{m,n}$	0	0	$\cdots$	$-a'_{m,1}/a_{j,1}$	$\cdots$	1	b'_m

la notation a' ou b' signifiant qu'il y a des nouvelles valeurs à calculer. On voit bien que la nouvelle base correspond aux coordonnées $(x_1, e_1, \cdots, e_{j-1}, e_{j+1}, \cdots, e_m)$ et le point extrême est donné par

$$x_1 = b_j/a_{j,1}, e_1 = b'_1, \cdots, e_m = b'_m.$$

On voit donc comment passer d'un point extrême à un autre, en chacun de ces points la valeur de la fonction économique varie (en augmentant ou en diminuant). Nous allons voir, dans une deuxième étape, comment, si on veut trouver un Maximum, trouver le nouveau point extrême pour que cette fonction ne fasse qu'augmenter jusqu'à son maximum et comment savoir et arrêter alors l'algorithme, que ce maximum est atteint.

1.5. **Choix du nouveau vecteur de base.** Ce choix va être conditionné par les coefficients de la fonction économique. Soit

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

et supposons que nous voulions trouver la plus grande valeur lorsque les variables sont soumises aux contraintes décrites dans le programme canonique :

$$
\begin{array}{l}
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \\
\left\{
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n \leq b_1, \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n \leq b_2, \\
\cdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n \leq b_m,
\end{array}
\right. \\
Max(f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)
\end{array}
$$

Associons le tableau complété suivant

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	e_1	e_2	$\cdots$	$\cdots$	e_m	B
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	1	0	$\cdots$	$\cdots$	0	b_1
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	0	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b_i
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	1	b_m
c_1	c_2	$\cdots$	c_{m_1}	c_m	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0	0

Pour choisir quelle est la colonne qui va être le nouveau vecteur de base, on considère l'indice i tel que c_i soit la plus grande valeur parmi les coefficients positifs de $c_1, \cdots, c_m$. Ceci aura pour but de choisir un nouveau vecteur de base et la valeur de la fonction économique au nouveau point extrême va augmenter (rappelons que l'objectif est de trouver un maximum de cette fonction).

2. Algorithme du simplexe

Considérons un programme linéaire présenté sous sa forme canonique. Le tableau correspondant est

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	e_1	e_2	$\cdots$	$\cdots$	e_m	B
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	1	0	$\cdots$	$\cdots$	0	b_1
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	0	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b_i
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$	0	0	$\cdots$	$\cdots$	1	b_m
c_1	c_2	$\cdots$	c_{m_1}	c_m	0	0	$\cdots$	$\cdots$	0	0

Description de l'algorithme. Rappelons que son but est d'associer à ce tableau un nouveau tableau en faisant rentrer un nouveau vecteur de base qui doit remplacer un ancien. Ainsi une colonne qui n'est pas un vecteur de base doit, en utilisant un pivot de Gauss, être ramenée à un vecteur de base, c'est-à-dire ayant une composante égale à 1 et toutes les autres 0.

(1) Choix de la colonne. Les coefficients de la fonction économique sont $c_1, \cdots, c_m$.

    On choisit le plus grand coefficient positif. S'il y a plusieurs c_i qui correspondent à cette plus grande valeur positive, on choisit ce que l'on veut, par exemple la première qui se présente en lisant ces coefficients dans l'ordre des indices.

(2) Choix de la ligne. Si la colonne choisie est la j-ème, le vecteur colonne choisi a pour composantes

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \cdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

(3) Le vecteur B s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Calculons les rapports $b_i/a_{i,j}$ pour $i = 1, \cdots m$ mais uniquement pour les $a_{i,j} > 0$. On choisit l'indice i_0 tel que le rapport $b_{i_0}/a_{i_0,j}$ soit le minimum. La ligne i_0 sera donc sélectionnée.

(4) On divise tous les coefficients de la ligne i_0 par $a_{i_0,j}$. Ce coefficient est ramené à 1. Par la méthode du pivot de Gauss, on ramène tous les autres coefficients $a_{i,j}$ ansi que c_j à 0.

(5) On retourne à la première étape tant qu'il existe des c_l strictement positif.. Si tous les coefficients de la fonction économique sont négatifs ou nuls, l'algorithme stoppe.

Il ne reste plus qu'à lire la solution trouvée. On ne considère que les variables correspondant aux vecteurs de base de la dernière étape. Ces variables prennent les valeurs données par le "nouveau" et dernier vecteur B, le second membre du tableau.

3. Exemple détaillé

Trouver le maximum de la fontion économique

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sachant que

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

soumis aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \end{cases}$$

(1) Première étape : introduisons les variables d'écart pour rendre l'écriture canonique.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + e_1 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + e_2 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + e_3 = 10 \end{cases}$$

Le tableau s'écrit alors

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ \hline -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(2) Choix de la colonne. Le plus grand coefficient positif de la fonction économique est 3. On choisit la colline numéro 2.

$$\left(\begin{array}{c}-1\\4\\3\\\hline 3\end{array}\right)$$

(3) Choix de la ligne. On calcule les coefficients $b_i/a_{i,j}$ pour les $a_{i,j} > 0$. Comme

$$B = \begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}$$

on calcule

$$12/4 = 3, 10/3.$$

Le minimum est $12/4 = 3$ donné dans la deuxième ligne. On choisit donc la deuxième ligne comme pivot.

(4) Modification du tableau

(a) On divise la deuxième ligne par 4

$$\begin{array}{cccccc|c}3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7\\-1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3\\-4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 10\\\hline -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

(b) On ramène la deuxième colonne sous la forme

$$\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\\\hline 0\end{array}\right)$$

On fait donc dans le dernier tableau Ligne 1+ Ligne 2 :

$$\begin{array}{cccccc|c}5/2 & 0 & 2 & 1 & 1/4 & 0 & 10\\-1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3\\-4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 10\\\hline -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

puis Ligne 3 -3 Ligne 2

$$\begin{array}{cccccc|c}5/2 & 0 & 2 & 1 & 1/4 & 0 & 10\\-1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3\\-5/2 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1 & 1\\\hline -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

et enfin pour la ligne correspondant à la fonction économique Ligne 4-3 Ligne 2

$$\begin{array}{cccccc|c}5/2 & 0 & 2 & 1 & 1/4 & 0 & 10\\-1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3\\-5/2 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1 & 1\\\hline 1/2 & 0 & -2 & 0 & -3/4 & 0 & -9\end{array}$$

(c) On interprète le nouveau tableau. Les nouveaux vecteurs de base sont Colonne 2, Colonne 4, Colonne 6 correspondant aux variables x_2, e_1, e_3 qui prennent les valeurs

$$x_2 = 3, e_1 = 10, e_3 = 1$$

car pour x_2 le pivot est sur la deuxième ligne et correspond donc à $b_2 = 3$, pour e_1 le pivot est à la première ligne et correspond à $b_1 = 10$ et pour e_3 la valeur est b_3. Toutes les autres variables prennent la valeur 0. La fonction économique vaut en ce point

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(0, 3, 0) = 9.$$

Notons que cette valeur est donnée dans la dernière case en bas à droite (en changeant le signe).

Les nouveaux coefficients de la fonction économique sont $1/2, 0, -2, 0, -3/4, 0$. Il existe des coefficients strictement positifs, on continue.

(5) Choix de la colonne. Le plus grand coefficient positif est le premier. On choisit la première colonne.

(6) Choix de la ligne. On calcule les coefficients $b_i/a_{i,1}$ dans le dernier tableau pour les $a_{i,1} > 0$. On a

$$10/(5/2) = 1$$

On choisit la première ligne. Le pivot est donc le coefficient de la première ligne, première colonne.

(7) On divise la première ligne par 5/2

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 & 1/10 & 0 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3 \\ -5/2 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 0 & -2 & 0 & -3/4 & 0 & -9 \end{array}$$

(8) On ramène à 0 tous les autres coefficients de la première colonne.

(a) Ligne 2 + 1/2. Ligne 1 :

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 & 1/10 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & 3/10 & 0 & 5 \\ -5/2 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 0 & -2 & 0 & -3/4 & 0 & -9 \end{array}$$

(b) Ligne 3 + (5/2). Ligne 1 :

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 & 1/10 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & 3/10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/2 & 1 & 11 \\ \hline 1/2 & 0 & -2 & 0 & -3/4 & 0 & -9 \end{array}$$

(c) Ligne 4 - (1/2). Ligne 1 :

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 2/5 & 1/10 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & 3/10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/2 & 1 & 11 \\ \hline 0 & 0 & -12/5 & -1/5 & -7/10 & 0 & -11 \end{array}$$

(9) Lecture du tableau. Les vecteurs de base sont Colonne 1, Colonne 2, Colonne 6 correspondant aux variables x_1, x_2, e_3 qui prennet les valeurs

$$x_1 = 4, x_2 = 5, e_6 = 11$$

La fonction économique en ce point vaut

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(4, 5, 0) = -4 + 15 = 11.$$

(10) Tous les coefficients de la fonction économique dans le dernier tableau sont nuls. **END . DAS IST ALLES.**

4. Cas où le programme n'est pas sous forme canonique