CNAM Alsace. Cycle Ingénieurs ISI. Année 2018-2019

Examen RCP 103 : Juin 2019

Durée 2 heures

Exercice 1

(1) (a) On lance un dé trois fois de suite. Décrire l'espace de probabilité lié à cette expérience.

(b) Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues. Montrer que c'est une variable aléatoire. Déterminer sa loi de probabilité.

(2) Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :

A = les deux enfants sont de sexes différents

B=l'ainé est une fille

C=le cadet est un garçon.

Montrer que A, B, C sont deux à deux indëpendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble $E = \{1;2;3\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Donner la définition d'une chaine de Markov.

(2) Interpréter la matrice de transition.

(3) Dessiner le graphe de cette chaine.

(4) On suppose que la loi de probabilité de X_0 est $\pi(0) = (1/2, 0, 1/2)$. Calculer la loi de probabilité de X_1, de X_2

(5) Calculer Q^2.

(6) Existe-t-il une loi stationnaire ? Vers quoi converge la loi de probabilité de X_n ?

Exercice 3. On considère les deux graphes de transition suivants, et pour chacun d'eux on va analyser les chaînes de Markov homogènes correspondantes.

(1) Compléter ces graphes.

(2) Décrire l'espace des états et écrire la matrice de transition

(3) La chaîne de Markov comporte combien de classes et quelles sont- elles ?

(4) Existe-t-il une loi stationnaire ? Si oui, qu'elle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[d] \\ E_4 \arrow[u] & E_3 \arrow[l] \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "0{,}25"] \arrow[d, "0{,}75"'] & E_2 \arrow[loop right] \\ E_4 \arrow[loop left] & E_3 \arrow[l, "0{,}75"'] \arrow[u, "0{,}25"'] \end{tikzcd}$$

Exercice 4. On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies, antilopes (a), gnous (g) et zèbres (z) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple ($gzzaggaa$). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie a (ou g ou z) après avoir mangé une proie g (ou a ou z) ne dépend que de a (ou g ou z) et non de ce qu'il avait mangé avant a (et que cette probabilité est invariante au cours du temps). D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{a, g, z\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

(1) Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

(2) Des deux trajectoires suivantes, ($zaag$) et ($zaga$), quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par un calcul.

(3) Tracer le graphe.

(4) Compléter la matrice

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & \cdot & 0,49 \\ 0,26 & 0,21 & 0,53 \\ 0,26 & 0,2 & \cdot \end{pmatrix}$$

(5) Calculer la probabilité pour que la chaîne passe de l'état a à l'état z en deux étapes (les lions mangent une antilope le premier jour, une autre proie (quelconque) le second et un zèbre le troisième jour).

Exercice 5. Le modèle de diffusion d'Ehrenfest. Deux urnes A et B contiennent, à elles deux , N boules, numérotées de 1 à N. A chaque instant, on choisit une boule de façon uniforme, et on la change d'urne. X_n correspond alors au nombre de boules contenues dans l'urne A à l'instant n. L'ensemble des états est donc l'ensemble $E = \{0, 1, \cdots, N\}$. On suppose qu'en l'instant 0 l'urne B est vide. On veut savoir au bout de combien de temps, l'urne A est de nouveau vide.

(1) Déterminer π_0 et π_1.

(2) On suppose maintenant $N = 3$. Déterminer la matrice de transition.

(3) Déterminer une loi invariante ? Est-ce que le processus converge vers cette loi ?

Ce processus décrit de façon simplifiée la diffusion d'un gaz d'un récipient A vers un récipient B initialement vide (chaque boule représente une molécule).