UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année
Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique

Elisabeth REMM

Chapitre 4

Distributions

Contents

Nous allons étudier les distributions à une variable mais cela peut se généraliser à plusieurs variables.

1. Espace des fonctions test

1.1. Définition.

Définition 1. *On appelle fonction test toute fonction*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

indéfiniment dérivable et à support borné (c'est à dire nulle en dehors d'un intervalle borné).

L'ensemble des fonctions test est un espace vectoriel réel de dimension infinie, noté $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si l'on veut préciser la dimension de l'espace de départ.

Exemples.

(1) Soit la fonction

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \geq 1, \\ \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & \text{pour } |x| < 1. \end{cases}$$

Cette fonction à pour support $[-1,1]$ et elle est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$. On peut montrer également à titre d'exercice qu'elle est également indéfiniment dérivable aux points -1 et 1 et toutes les dérivées sont nulles en ces points.

On peut également noté que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(t)dt$$

converge car la fonction est bornée à support compact (fermé borné).

(2) Considérons la famille de fonctions

$$\gamma_k(x) = \frac{\zeta(kx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(kt)dt}$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k(t)dt = 1$ (la fonction γ_k est dite normée). Le support de γ_k est $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$.

1.2. **Construction de fonctions de $\mathcal{D}$.** A partir de fonctions de $\mathcal{D}$ on peut en construire beaucoup d'autres grâce au théorème suivant

Théorème 1. *Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et si f est à support borné et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ est convergente, alors*

$$\psi(x) = (f \star \phi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$$

est une fonction de $\mathcal{D}$.

1.3. **Notions de convergence dans $\mathcal{D}$.** Rappel sur la convergence uniforme: soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I si pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

(2) la notion de convergence uniforme sur un intervalle est plus délicate. la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I si et seulement la suite numérique $(a_n)_n$ avec $a_n = sup_{x \in I}\{|f_n(x) - f(x)|\}$ converge vers 0

L'intérêt d'étudier la convergence uniforme est de récupérer des propriétés sur la fonction limite ce que l'on ne peut faire dans le cas de la convergence simple.

Rappelons les résultats fondamentaux

(1) Si les fonctions f_n sont continues sur I et si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur I alors la fonction f est continue sur I.

(2) Si les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I et si l
 (a) il existe $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $f_n(x_0)$ converge
 (b) si la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I
 alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I de classe C^1 sur I telle que $f' = g$ sur I.
(3) Si la suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $I = [a, b]$ et si elle converge uniformément vers la fonction f sur I alors:
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$
 tend vers 0.

Définition 2. *(Convergence dans $\mathcal{D}$). On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ appartenant à $\mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers une fonction φ de $\mathcal{D}$ si*

(1) *les supports des φ_n sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de n*
(2) *les dérivés à chaque ordre des φ_n convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de φ (la convergence uniforme est exigée séparement pour chaque ordre)*

Exemple On considère la suite $(\varphi_n)_n$ avec
$$\varphi_n = \frac{\zeta(x)}{n}$$
La suite converge dans $\mathcal{D}$ vers la fonction nulle.

2. Distributions: définition et exemples

2.1. **Définition.**

Définition 3. *On appelle distribution toute forme linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ c'est à dire un opérateur T qui à une fonction de $\mathcal{D}$ fait correspondre un nombre complexe*
$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & T(\varphi) =< T, \varphi > \end{array}$$
et on exige deux propriétés

(1) *la linéarité: si T est une distribution, on a pour toute $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$,*
$$< T, \varphi_1 + \varphi_2 >=< T, \varphi_1 > + < T, \varphi_2 >$$
 et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
$$< T, \lambda\varphi >= \lambda < T, \varphi > .$$
(2) *la continuité: Si la suite $(\varphi_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ, la suite de nombres $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$.*

Exemples.

(1) **La distribution de Dirac en** 0. Considérons l'application
$$\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$
 définie par
$$< \delta, f >= f(0).$$

Cette fonctionnelle δ est bien linéaire. Montrons la continuité: soit $f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ qui converge vers f dans $\mathcal{D}$. Ceci implique que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f donc simplement. En particulier la suite numérique $(f_n(0))_n)$ à pour limite $f(0)$. Ceci montre que la suite $< \delta, f_n >$ tend vers $< \delta, f >$ quand n tend vers l'infini. Ceci prouve que δ est continue dans $\mathcal{D}$. La fonctionnelle δ est donc bien une distribution qui est appelée la distribution de Dirac en 0.

(2) **La distribution de Dirac centrée en a.** Soit $a \in \mathbb{R}$ On définit comme ci-dessus une distribution en posant
$$< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

(3) **Le peigne de Dirac**. On appelle de Dirac la distribution III (prononcé cha) définie par
$$< \mathrm{III}, f >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$
Nontons que cette somme est en réalité finie grâce à l'hypothèse sur le support de f qui est borné donc pour n assez grand, n est en dehors du support de f et donc $f(n) = 0$ et il en est de même pour n assez petit négatif. Il ne reste donc en fait pour chaque fonction f qu'une somme finie).

(4) Soit T défini par
$$< T, \varphi >= \int_0^1 \varphi(x)dx$$
pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.

2.2. Distributions régulières.

Définition 4. *Fonction localement sommables. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ c'est à dire un intervalle fermé borné, et soit χ_K sa fonction caractéristique, c'est-à-dire définie par*
$$\chi_K(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in K \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
On dit que la fonction f est localement sommable (= localement intégrable), si pour tout compact K la fonction la fonction $|f \cdot \chi_K|$ est intégrable.

Théorème 2. *Toute fonction sommable définie une distribution notée T_f définie par*
$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$
pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. Une telle distribution est appelée distribution régulière.

Démonstration. Il est clair que T_f est linéaire. Montrons qu'elle est continue sur $\mathcal{D}$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ convergent vers φ. Supposons que tout les supports des φ_n et de φ sont strictement contenus dans l'intervalle $A = [a, b]$. Alors
$$\begin{aligned} | < T_f, \varphi_n > - < T_f, \varphi > | &= | \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \\ &\leq \textstyle\int_a^b |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \\ &\leq sup_{x\in[a,b]}|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \textstyle\int_a^b |f(x)|dx \end{aligned}$$
Comme $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers φ alors $sup_{x\in[a,b]}|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to_{n\to+\infty} 0$ et donc $< T_f, \varphi_n >$ converge vers $< T_f, \varphi >$ et l'opérateur T_f est bien continue dans $\mathcal{D}$.

Exemple. Soit f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien localement sommable. La distribution régulière associée est donnée par:

$$< T_f, \varphi >= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Si φ est continue et a un support qui est inclus strictement dans $[-a, +a]$ avec $a > 0$ on a

$$< T_f, \varphi >= -\int_{-a}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{a} \varphi(x)dx.$$

et si Φ est une primitive de φ on a

$$< T_f, \varphi >= -\Phi(0) + \Phi(-a) - \Phi(0) + \Phi(a) = -2\Phi(0).$$

Remarque. Deux fonctions localement sommables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout (signifie que f et g ont la même intégrale sur $\mathbb{R}$)

2.3. **Les distributions singulières.** Une distribution qui n'est pas régulière est dite singulière.

Proposition 1. *La distribution de Dirac est une distribution singulière.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction g localement sommable $\delta_0 = T_g$ c'est à dire

$$< \delta_0, \varphi >= \int \varphi(x)g(x)dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. Considérons une suite de fonctions $(f_n)_n$ de classe C^∞ telle que

(1) le support de $(f_n)_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,
(2) $f_n(x) \in [0, 1]$,
(3) $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc

$$< \delta_0, f_n >= 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais

$$< T_g, f_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx$$

converge vers 0. En effet la suite de fonctions $(g(x)f_n(x))_n$ est une suite de fonctions localement sommables qui converge simplement vers une fonction qui est nulle partout sauf en 0. L'intégrale tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. En effet pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x)g(x)| \leq (g(x)|$ qui est intégrable sur I et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} g(x)f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to+\infty} g(x)f_n(x)dx.$$

Ainsi $< \delta_0, f_n >= 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $< T_g, f_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et δ n'est pas une distribution régulière.

Remarque. Représentation de la distribution de Dirac δ_0 par une flèche.

On représente de la même façon la distribution

$$\delta_a - \frac{1}{2}\delta_{-a} + \delta_0.$$

On rencontre fréquemment des impulsion, par exemple de courants électriques, de durée très petite, mais d'effet énergétique non négligeables. L'interprétation mathématique d'une impulsion est une distribution de Dirac (on l'appelle aussi impulsion de Dirac). La distribution de Dirac en 0 peut être aussi définie comme suit: ε étant positif, posons

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } t \in]0, \varepsilon[\end{cases}$$

On a évidemment $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)dt = 1$ La distribution de Dirac δ_0 est alors

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t).$$

3. Opérations sur les distributions

3.1. **Addition, multiplication par un scalaire.** On définit l'addition et la multiplication par un scalaire de la façon suivante:

(1) **Addition**: La somme de deux distributions T_1 et T_2 est la distribution $T_1 + T_2$ définie par

$$< T_1 + T_2, \varphi >=< T_1, \varphi > + < T_2, \varphi >$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$.

(2) **Multiplication par un scalaire.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et T une distribution alors λT est la distribution définie, pour tout φ $\mathcal{D}$, par

$$< \lambda T, \varphi >= \lambda < T, \varphi > .$$

Démonstration. On vérifie sans peine que $T_1 + T_2$ et λT sont bien des distributions.

Par exemple dans le cas des distributions régulières on a bien

$$< T_f + T_g, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) + g(x))\varphi(x)dx =< T_f, \varphi > + < T_f, \varphi >$$

et

$$< \lambda T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(x)\varphi(x)dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \lambda < T_f, \varphi >$$

(linéarité de l'intégrale)

On montre encore que $T_1 + T_2$ et λT sont continues.

3.2. **L'espace vectoriel des distributions.**

Théorème 3. *Soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions. Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Bien évidemment, cet espace est de dimension infinie.

3.3. **Support d'une distribution.**

Définition 5. *On dit que deux distributions T_1 et T_2 sont égales si*

$$< T_1, \varphi > = < T_2, \varphi >$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$.

On dit qu'elles sont égales sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ si

$$< T_1, \varphi > = < T_2, \varphi >$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ mais ayant son support dans Ω.

Considérons maintenant tous les ouverts sur lesquels la distribution T est nulle. La réunion de tous ces ouverts est encore un ouvert qui est le plus grand des ouverts sur lequel T est nul (admis). Son complémentaire est un fermé appelé le support de T.

Exemple. Soit δ_0 la distribution de Dirac. Son support est réduit à l'ensemble $\{0\}$.

4. Translation, Transposition, Dérivation

4.1. **Translation d'une distribution.**
Commençons à regarder l'effet d'une translation pour les distributions régulières. Soit f une fonction localement sommable et a une constante de $\mathbb{R}$. Cherchons la distribution associée à la fonction g définie par $g(t) = f(t-a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$< T_g, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(y+a)dy = < T_f, \psi >$$

où $\psi(x) = \varphi(x+a)$. Cette formule est obtenue grâce au changement de variable $y = x - a$. Afin de simplifier les formules et de rendre cette propriété plus claire, on choisit d'écrire

$$< T_{f(x-a)}, \varphi(x) > = < T_{f(x)}, \varphi(x+a) >$$

(cet abus de notation évite l'introduction des fonctions g et ψ, de la même manière que dans les formules similaires relatives aux transformées de Fourier d'un fonction). On voit que la notation est tout de même une peu lourde. On va donc aussi noté f la distribution associée à la fonction f au lieu de T_f, ce qui donne

$$< f(x-a), \varphi(x) > = < f(x), \varphi(x+a) >$$

On définit alors pour toute distribution (régulière ou singulière) T la distribution $T(x-a)$ appelée translatée de T (par a)

Définition 6. *Soit $T \in \mathcal{D}'$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La translaté de T par a est la distribution notée $T(x-a)$ et définie par*

$$< T(x-a), \varphi(x) > = < T(x), \varphi(x+a) >$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$.

Exemple. Si δ_a est la distribution de Dirac au point a on a

$$< \delta_a, \varphi > = \varphi(a)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. Vérifions que

$$\delta_a = \delta(x-a)$$

où δ est la distribution de Dirac en 0. Pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$< \delta(x-a), \varphi(x) >=< \delta(x), \varphi(x+a) >= \varphi(a) =< \delta_a, \varphi > .$$

Puisque les distributions $\delta(x-a)$ et δ_a coincident sur toutes les fonctions de $\mathcal{D}$ elles sont égales.

4.2. **Transposée d'une distribution, changement d'échelle.** Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. La transposée de f est la fonction (parfois notée $\widehat{f}$)

$$x \to \widehat{f}(x) = f(-x).$$

De plus si la fonction f est localement sommable, la fonction $\widehat{f}$ l'est aussi. Donc elles définissent des distributions régulières et on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$< T_{\widehat{f}}, \varphi >=< T_f, \widehat{\varphi} >$$

qu'on écrit aussi

$$< T_{f(-x)}, \varphi(x) >=< T_{f(x)}, \varphi(-x) >$$

ou encore

$$< f(-x), \varphi(x) >=< f(x), \varphi(-x) >$$

(dans cette formule $f = f(x)$ est une distribution ainsi que $f(-x)$. On définit alors pour toute distribution T, la distribution $\widehat{T} = T(-x)$ (c'est bien une distribution car $T(-x)$ reste linéaire et puisque pour une fonction φ de $\mathcal{D}$ on a $sup_{\mathbb{R}}\{\varphi(x)\} = sup_{\mathbb{R}}\{\varphi(-x)\}$ on aura la continuité $T(-x)$ dans $\mathcal{D}$) par

$$< \widehat{T}, \varphi >=< T, \widehat{\varphi} >$$

qu'on écrit aussi

$$< T(-x), \varphi(x) >=< T(x), \varphi(-x) >$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$.

Changement d'échelle. Cette notion est cette fois ci liée au changement de variables $x \to ax$. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle et soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit la dilatée (ou contractée) de la fonction f par

$$x \to f(ax).$$

Comme précédemment par abus de notation on notera cette fonction $f(ax)$. On peut comme pour la translatée définir la distribution régulière associée à la dilatée d'une fonction que l'on notera $T_{f(ax)}$ et montrer que les distributions T_f et $T_{f(ax)}$ vérifient:

$$< T_{f(ax)}, \varphi(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\varphi(t)dt = \frac{1}{|a|} < T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$$

(montrer en exercice que l'on a bien cette formule. Aide: faire un changement de variable et étudier les cas où $a > 0$ et $a < 0$ avant de montrer que l'on peut les rassembler avec une écriture unique grâce à $|a|$). On peut écrire encore la formule précédente ainsi:

$$< f(ax), \varphi(x) >= \frac{1}{|a|} < f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$$

si l'on note T_f également par f. (Dans la formule les membres de gauche dans $< \cdot, \cdot >$ sont donc bien des distributions associées à des fonctions).

On définit alors pour toute distribution T (aussi notée $T(x)$), la distribution $T(ax)$ (montrer que c'est bien une distribution, en particulier que l'opérateur $T(ax)$ de $\mathcal{D}$ est bien continue dans $\mathcal{D}$) par

$$< T(ax), \varphi(x) >= \frac{1}{|a|} < T(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$$

4.3. **Multiplication d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^\infty$.** Si T est une distribution et si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on peut définir une distribution ψT de $\mathcal{D}$ par

$$< \psi T, \varphi >=< T, \psi\varphi >$$

pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$.

On définit bien une distribution de $\mathcal{D}$. La linéarité est simple à démontrer. Pour la continuité, prenons une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{D}$ convergent dans $\mathcal{D}$ vers la fonction φ de $\mathcal{D}$. et soit $[a, b]$ contenant tous les supports des φ_n et de φ. Alors la suite $(\psi\varphi_n)_n$ est encore dans $\mathcal{D}$ et

$$||\psi\varphi_n - \psi\varphi||_\infty \leq sup_{[a,b]}\{\psi(x)\}||\varphi_n - \varphi||_\infty$$

la fonction ψ qui est continue est bornée sur un fermé borné et

$$||\psi\varphi_n - \psi\varphi||_\infty \leq M||\varphi_n - \varphi||_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque la suite $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers φ. On peut faire un raisonnement semblable sur toutes les dérivées donc $(\psi\varphi_n)_n$ est une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers $\psi\varphi$. Ainsi $< T, \psi\varphi_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < T, \psi\varphi >$ car T est une distribution donc continue d'où $< \psi T, \varphi_n >=< T, \psi\varphi_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < T, \psi\varphi >=< \psi T, \varphi >$ et ψT est continue. C'est donc une distribution.

Exemple. Prenons ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $T = \delta$ la distribution de dirac. Montrons que la distribution $\psi\delta$ est égale à la distribution $\psi(0)\delta$. Pour cela, il faut montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ on a

$$< \psi\delta, \varphi >=< \psi(0)\delta, \varphi > .$$

On a

$$< \psi\delta, \varphi >=< \delta, \psi\varphi >= \psi(0)\varphi(0) = \psi(0) < \delta, \varphi >=< \psi(0)\delta, \varphi >$$

d'où le résultat.

Remarque: sur le produit de deux distributions. Cette opération ne peut se définir. Par contre nous verrons en fin de chapitre comment travailler avec un produit de convolution de distributions.

5. Dérivée (au sens des distributions) d'une distribution

Soit f une dérivable dont la dérivée f' est localement sommable. La distribution régulière associée à f' vérifie

$$< f', \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - < f, \varphi >$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$, le support de φ étant borné.

Définition 7. *On définit pour tout distribution T sa dérivée au sens des distributions notée T' par*

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' >$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.

On vérifie facilement la linéarité et la continuité de T' et donc T' est bien une distribution.

Exemple. Soit H la fonction de Heaviside c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue et donc pas dérivable au point $x = 0$. Nous pouvons toutefois calculer la dérivée de la distribution régilère T_H associée à H. Nous dirons que nous calculons sa dérivée H' au sens des distributions.

$$< H', \varphi >= - < H, \varphi' >= - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ puisque $lim_{x \to -\infty}\varphi(x) = 0$. Ainsi

$$< H', \varphi >=< \delta_0 \varphi >$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et

$$H' = \delta_0 \text{ (\textbf{au sens des distributions})}$$

Remarque. On peut bien sûr généraliser cette formule pour des dérivées d'ordre supérieur mais aussi dériver au sens des distributions des fonctions continues par morceaux. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec un nombre fini de points a_i de discontinuité et $\gamma_i^{(0)} = f(a_i^+) - f(a_i^+)$ le saut de discontinuité.

$$f' = \{f'\} + \sum_i \gamma_i^{(0)} \delta(x - a_i)$$

où $\{f'\}$ est la distribution régulière définie par la dérivée usuelle de f au sens des fonctions, i.e.

$$< \{f'\}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx;$$

($\{f'\}$ est bien une distribution puisque f' la dérivée de f au sens des fonctions est une fonction qui **n'est pas définie partout notamment aux points de discontinuité de** f, mais la distribution régulière associée est bien définie si f' est définie presque partout)

Une idée du résultat vient du fait que l'on peut écrire f comme somme d'une fonction continue g et de fonctions de Heaviside.

$$f(x) = g(x) + \sum_i \gamma_i^{(0)} H(x - a_i).$$

Alors $\{f'\} = \{g'\}$ (les fonctions f et g sont égales presque partout). Le résultat découle alors du fait que $H' = \delta$.

Attention. La dérivée au sens des distributions de la fonction H est la distribution de Dirac mais la distribution associée à la dérivée au sens des fonctions de H est $\{H'\} = 0$ (fonction nulle).

On retrouve $H' = 0 + 1 \cdot \delta = \delta$.

EXERCICES

Exercice 1- Soit $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = 1$$

et soit H la fonction de Heaviside c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que les distributions régulières associées à ces deux fonctions sont égales sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 - Calculer le support de δ_a et du peigne de Dirac.

Exercice 3 - Démontrer que la fonction $\ln |x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - Soit la fonctionnelle $T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$T(\varphi) =< T, \varphi >= \varphi'(0)$$

Démontrer que T est une distribution.

Exercice 5 - Limite au sens des distributions. On dit que la suite de distributions $(T_n)_n$ de $\mathcal{D}'$ converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $(< T_n, \varphi >)_n$ tend vers $< T, \varphi >$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.

Soit la fonction porte

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $g_n(x) = n\Pi(nx)$. Calculer la limite de la suite (T_{g_n}).

Exercice 6 - Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = sgn(x)$ ($f(x) = 1$ pour $x > 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et $f(0) = 0$)

Exercice 6 - Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^{+\infty}$.

1. Déterminer la distribution $\psi\delta$.
2. En déduire $\psi\delta$ quand $\psi(x) = x$.
3. En déduire que si $\alpha \in \mathbb{C}$, la distribution $\alpha\delta$ est solution de l'équation d'inconnue T:

$$xT(x) = 0.$$