Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1. Mathématiques et Informatique

Mathématiques : ARITHMETIQUE et ALGEBRE

Cours Elisabeth Remm, Guido Ahumada

EXERCICES Chapitre 1

Ensembles, Relations, Fonctions et Applications

Exercice 1.

(1) Soient les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d, e\}$. Compléter avec l'un des symboles $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ les formules suivantes

$$a \cdots A, \quad a \cdots B, \quad \{a\} \cdots A, \quad \{a, c\} \cdots B, \quad \{a, c\} \cdots E,$$
$$A \cdots B, \quad \emptyset \cdots B, \quad c \cdots B, \quad \{b\} \cdots \mathcal{P}(A)$$

(2) Compléter avec l'un des symboles $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ les formules suivantes

$$\{-1\} \cdots \mathbb{N}, \quad \{-1, 0, 2\} \cdots \mathbb{Z}, \quad \{-\frac{1}{3}\} \cdots \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \cdots \mathbb{Q}, \quad \pi \cdots] - \infty, 3.14].$$

Exercice 2. Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 5\}, \quad B = [\sqrt{2}, \sqrt{10}] \cap \mathbb{N}, \quad B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, 2 \leq x^2 + 2y < 5\}.$$

Exercice 3.

(1) Soit A l'ensemble fini à un élément $A = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A)$. Quelle est sa cardinalité (combien d'éléments contient-il) ?

(2) Soit B l'ensemble fini à trois éléments $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(B)$. Quelle est sa cardinalité ?

(3) Plus généralement, soit E un ensemble fini à n éléments. Quelle est la cardinalité de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 4. L'opération consistant à passer d'un ensemble A à l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ permet de construire des ensembles de plus en plus compliqués.

(1) Combien d'éléments contient l'ensemble vide $\emptyset$?

(2) Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset)$. Combien d'éléments contient-il ?

(3) Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Combien d'éléments contient-il ?

(4) Même question avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. Soient A et B deux ensembles. Montrer que si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, alors $A = B$.

Exercice 6. Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Déterminer les ensembles

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A - (A \cap B), \quad A \times B, \quad \mathcal{P}(A).$$

Exercice 7. Soit l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et ses parties $B_1 = \{a, b, c\}$ et $B_2 = \{b, d\}$.

(1) Déterminer les ensembles

$$B_1 \cap B_2,\ B_1 \cup B_2,\ \complement_A B_1,\ \complement_A B_2,\ \complement_A (B_1 \cap B_2),\ B_1 - B_2.$$

(2) Déterminer les ensembles :

$$\mathcal{P}(B_1), \quad \mathcal{P}(B_2), \quad \mathcal{P}(B_1 \cap B_2), \mathcal{P}(B_1) \cap \mathcal{P}(B_2), \quad \mathcal{P}(B_1 \times B_2).$$

Exercice 8. Soit A un ensemble et B_1,B_2 deux sous-ensembles. Montrer les relations suivantes

(1) $B_1 \cup \complement_A B_1 = A, \quad B_1 \cap \complement_A B_1 = \emptyset, \quad \complement_A(\complement_A B_1) = B_1$

(2) $\complement_A (B_1 \cup B_2) = \complement_A B_1 \cap \complement_A B_2$.

(3) $\complement_A (B_1 \cap B_2) = \complement_A B_1 \cup \complement_A B_2$.

(4)

Exercice 9. Soient B_1 et B_2 deux sous-ensembles de A. On appelle différence symétrique de B_1 et B_2 le sous-ensemble, noté $B_1 \Delta B_2$, et défini par

$$B_1 \Delta B_2 = \{x \in A, (x \in B_1 \text{ et } x \notin B_2) \text{ ou } (x \notin B_1 \text{ et } x \in B_2)\}.$$

Montrer les relations

(1) $B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) - (B_1 \cap B_2)$,

(2) $B_1 \Delta B_2 = ((B_1 - (B_1 \cap B_2)) \cup (B_2 - (B_1 \cap B_2)$,

(3) $(B_1 \Delta B_2) \cap B_1 = B_1 - (B_1 \cap B_2)$.

Exercice 10. Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :

$$A \mathcal{R} B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \complement_E B.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 11. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation

$$n \mathcal{R} m \ \text{ si et seulement si } n + m \text{ est pair.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Exercice 12. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.

Exercice 13. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation sur E en posant, pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$x \mathcal{R} x' \iff f(x) = f(x').$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence $cl(x)$ de l'élément $x \in E$

(3) Notons par $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que l'application
$$\pi : E/\mathcal{R} \to F$$
donnée par
$$\pi(cl(x)) = f(x)$$
est bien définie.

Exercice 14. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}$ par
$$x\mathcal{R}x' \Longleftrightarrow \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x' = x^n.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 15. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 < x_2, \text{ ou si } x_1 = x_2 \text{ alors } y_1 \leq y_2.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 16. Les ensembles suivants
$G_1 = \{(0,1), (1,0), (0,3)\}$, $G_2 = \{(0,1), (1,0), (2,3)\}$, $G_3 = \{(n, \sqrt{n}), n \in \mathbb{N}\}$, $G_4 = \{(n^2, n), n \in \mathbb{Z}\}$
sont-ils des graphes d'applications ? Si non, dites pourquoi. Si oui donner l'ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

Exercice 17. Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Ecrire toutes les bijections de E dans F.

Exercice 18. Soit $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

(1) Existe-t-il une bijection de E dans F ?

(2) Ecrire toutes les injections de E dans F .

(3) Ecrire toutes les surjections de F dans E.

Exercice 19. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{llll}
f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f_1(n) = n^2 & f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & f_2(n) = n^2 \\
f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f_3(n) = n + 1 & f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f_4(n) = n + 1 \\
f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5(x) = |x - 1| & f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_6(x,) = (x + y, x - y)
\end{array}$$

Exercice 20. Soit A un ensemble à 3 éléments et B un ensemble à 4 éléments.

(1) Combien y a-t-il d'applications de A dans $A \times B$?

(2) Combien y a-t-il de bijections de A dans B ? de B dans B ?

(3) Combien y a-t-il d'injections de A dans B ? de B dans A ?

(4) Combien y a-t-il de surjections de A dans B ?

Exercice 21. On considère les ensembles $E = \{-2, -1, 2, 4\}$ et $F = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et $f : E \to F$ l'application définie par : $f(n) = |n - 1|$.

(1) Soit G le graphe de f. Ecrire G en extension.

(2) L'application f est-elle injective ? surjective ? (justifiez vos réponses).

(3) Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et ${}^{-1}1(\{0,1,2\})$.

Exercice 22. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |4-2x| + |x+3|$.

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective. Donner des exemples d'intervalles I_1, I_2, J_1 et J_2 tels que $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est injective, $f : \mathbb{R} \to J_1$ est surjective et $f : I_2 \to J_2$ est bijective

Exercice 23. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x2 + 6x - 2$.

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Déterminer les ensembles :

$$f([0,4]),\ f^{-1}(\{11\}),\ f^{-1}(\{6,7\}),\ f^{-1}([2,+\infty[),\ f^{-1}(]-\infty,6]).$$

Exercice 24. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} x+2 & \text{si } x<0, \\ -x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

(3) Déterminer $f([-2,1])$ et $f(]0,+\infty[)$.

(4) Déterminer $f^{-1}(f(]0,+\infty[))$.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par : $f(x) = 3x^3 - 12x - 5$.

(1) Soit $A = \{-1,1,2\}$. Déterminer $f(A)$.

(2) Déterminer $f^{-}(\{5\})$. Qu'en déduit-on pour f ?

(3) En raisonnant par l'absurde, montrer que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Qu'en déduit-on pour f ?

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

(1) Déterminer $f(-3)$, $f(\{-3\})$ et $f(\{-3,1\})$.

(2) Déterminer l'antécédent de 3 ; 1 a-t-il un antécédent ? Qu'en déduit-on pour f ?

(3) Montrer que tout $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$ possède un unique antécédent que l'on déterminera.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ? Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Exercice 28. Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}, \quad g \circ f \text{surjective} \Rightarrow \text{surjective}.$$