Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1. Mathématiques et Informatique

Mathématiques : ARITHMETIQUE et ALGEBRE

Elisabeth Remm

EXERCICES Chapitre 2

Récurrence dans $\mathbb{N}$, Divisibilité, nombres premiers, PGCD

Exercice 1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les formules suivantes :

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(4) $5 + 8 + 11 + \cdots + (5n+3) = 5(n+1) + 3\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2. Soient n et m deux entiers supérieur ou égal à 1. Si $n \geq m$, on définit les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ est le produit des n premiers nombres entiers . On pose $0! = 1$. Démontrer que

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

Exercice 3.

(1) Démontrer par récurrence que pour tout réel x, $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Montrer également cette identité sans utiliser le raisonnement par récurrence.

(2) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, $a - 1$ divise $a^n - 1$.

(3) Montrer que si d est un diviseur de n, alors $a^d - 1$ divise $a^n - 1$.

Exercice 4. Soient a et b deux entiers non nuls et soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

(1) Donner les valeurs possibles de a lorsque $b = 5$ et $q = -2$.

(2) Déterminer b et q lorsque $a = 44$ et $r = 6$.

Exercice 5. Deux entiers a et b vérifient $a = 11b + 47$. Trouver le quotient et le reste de la division de a par 11, puis de $-a$ par 11 et enfin de $3a + 2$ par 11.

Exercice 6. Si l'on divise un entier $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$, le reste est 7. Si l'on divise $2a$ par b le reste est 2. Trouver a.

Exercice 7. Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux.

(1) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a et b^n sont premiers entre eux.

(2) En déduire que pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, les entiers a^m et b^n sont premiers entre eux.

Exercice 8. Soit n un entier qui ne s'écrit pas comme un carré d'entier, c'est-à-dire qui ne s'écrit pas $n = m^2$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et p et q premiers entre eux. Montrer, en utilisant par exemple l'exercice précédent, que $q = 1$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9. Calculer en utilisant l'algorithme d'Euclide le PGCD des entiers a et b suivants

(1) $a = 2010$ et $b = 871$,

(2) $a = 774$ et $b = 665$,

(3) $a = 4680$ et $b = 539$.

Dans chacun des cas, déterminer deux nombres u et v tels que $au + bv = PGCD(a, b)$.

Exercice 10. Déterminer le PGCD et le PPCM des nombres a et b suivants :

(1) $a = 441$ et $b = 777$,

(2) $a = 8515$ et $b = 5502$.

Exercice 11. Trouver le nombre d'entiers n inférieurs ou égaux à 1000 tels que

$$PGCD(n, 42) = 6.$$

Exercice 12. Soient a et b deux entiers strictement positifs et premiers entre eux.

(1) Soit c un diviseur de a. Montrer de deux façons différentes que les entiers c et b sont premiers entre eux.

(2) Montrer de même que a et $a + B$ sont premiers entre eux.

(3) En est-il de même avec a et $a + 2b$?

Exercice 13. Combien d'entiers compris entre 40 et 800 sont multiples de 4, de 6, de 4 et de 6 ?

Exercice 14. Un nombre de la forme $n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, peut-il être un multiple de 4 ?

Exercice 15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, l'entier $n^3 + 5$ est un multiple de 6. En déduire que $n^3 + 2009n$ et $n^3 - 7n + 18$ sont aussi des multiples de 6.

Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 6.

Exercice 16. Trouver tous les entiers a et b positifs non nuls et $a \leq b$ tels que $PGCD(a, b) = 42$ et $PPCM(a, b) = 1470$.

Exercice 17.

(1) On veut découper un rectangle de 36cm et 45 cm de côtés en carrés identiques aussi grands que possible et sans perte. Quelle est la longueur du côté de ces carrés ?
(2) On rassemble des rectangles identiques au précédent,bord à bord, pour former un carré aussi petit que possible. Quelle est la longueur du côté de ce carré ?

Les exercices suivants sont tirés du sujet du concours Kangourou des Mathématiques édition 2018, niveau terminale.

Exercice 18. De combien de manières l'entier 1001 peut-il être écrit comme la somme de deux nombres premiers ?

Exercice 19. Lequel de ces nombres ne divisent pas $18^{2017} + 18^{2018}$:

$$8, \quad 18, \quad 28, \quad 38, \quad 48.$$

Exercice 20. On dispose d'un jeu de 5 cartes : le 3, le 4, le 5, le 6 et le 7 de coeur. Marion prend 3 de ces cartes et Nadia les deux autres. Chacune multiplie les valeurs de ses cartes et en ajoutant ces deux produits, on obtient un nombre premier. Quelle est la somme des valeurs des cartes de Nadia ?