FST Mulhouse.

Licence 1 Maths-Info

Mathématiques : ARITHMETIQUE-ALGEBRE

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Ensembles, Relations d'équivalence, Applications

Table des matières

1. Les ensembles

La notion d'ensemble est la pierre angulaire des mathématiques. En effet, les mathématiques reposent sur trois processus fondamentaux : construire des objets (ces objets seront les ensembles), former des relations entre ces objets et éventuellement démontrer que certaines de ces relations sont vraies. Ces objets mathématiques sont par exemple les nombres, les fonctions qui représentent des modèles abstraits d'objets physiques. Il existe une théorie formelle, appelée Théorie des Ensembles, qui supporte cette notion d'ensemble. Nous ne l'aborderons pas ici, nous nous contenterons d'une définition intuitive de la notion d'ensemble, qui, pour se rassurer, satisfaisait largement les concepteurs de cette théorie (Cantor, Zermelo- Fraenkel).

1.1. **L'appartenance $\in$. L'ensemble vide $\emptyset$. Ensembles finis.** On appelle ensemble, toute collection d'objets caractérisés par certaines propriétés. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble. Les ensembles classiques que nous utiliserons sont

(1) $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, \cdots$,
(2) $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs $\cdots , -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$,
(3) $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers relatifs mais q non nul,
(4) $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
(5) $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour désigner un ensemble, nous utiliserons couramment une lettre majuscule E. Les objets appartenant à l'ensemble E seront désignés en général par une lettre (latine ou grecque) minuscule. On parlera ainsi de l'élément x appartenant à l'ensemble E. On utilisera dans ce cas le symbole

$$\in$$

et cette propriété se traduira par la formule

$$x \in E.$$

La négation de cette propriété s'écrira

$$x \notin E.$$

Un ensemble est dit vide s'il ne contient aucun élément. On note cet ensemble

$$\emptyset$$

Un ensemble est dit fini s'il ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Un ensemble qui ne contient qu'un élément x est noté

$$\{x\}.$$

Un ensemble qui ne contient que deux éléments, x et y, se notera

$$\{x, y\}$$

l'ordre d'écriture des éléments n'important pas.

1.2. **L'inclusion, l'égalité.** A partir du signe d'appartenance on introduit une abréviation notée

$$\subseteq$$

et appelée signe d'inclusion. Etant donnés deux ensemble A et B, on dira que A est contenu dans B (ou qu'il est inclus) si tout élément de A est aussi un élément de B et on écrira

$$A \subseteq B.$$

Parmi tous les sous-ensembles de B figure B lui même, c'est-à-dire que

$$B \subseteq B$$

a bien un sens. Si on ne veut considérer que les sous-ensembles propres de B, c'est-à-dire non égaux à B on utilisera le symbole

$$\subset \quad \text{(certains utilisent aussi le symbole } \subsetneq\text{)}$$

Ainsi $A \subset B$ signifie que A est un sous-ensemble de B mais A ne coïncide pas avec B (il y a des éléments dans B qui ne sont pas dans A. Naturellement, on peut aussi noter

$$B \supseteq A, \quad \text{ou} \quad B \supset A$$

qui se lit B contient A.

Définition 1. *Etant donnés deux ensemble A et B, nous dirons qu'ils sont égaux, et on écrira*

$$A = B$$

si tout élément de A et élément de B et si tout élément de B est élément de A, c'est-à-dire si

$$A \subseteq B \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}.$$

Ainsi pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux on montre que

(1) 1. tout élément x appartenant à A est aussi un élément de B,

(2) 1. tout élément y appartenant à B est aussi un élément de A.

La relation d'inclusion possède également la propriété suivante

Proposition 1. *Les relations*

$$A \subseteq B \quad \text{et} \quad B \subseteq C$$

implique

$$A \subseteq C.$$

On dit que la relation d'inclusion est transitive.

Lorsque A n'est pas inclus dans B, c'est-à-dire lorsqu'il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$, on note $A \not\subset B$.

1.3. **L'ensembles $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensembles A.** Soit A un ensemble. Il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(A)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de A. On a ainsi

$$B \in \mathcal{P}(A) \ \text{ si et seulement si } \ B \subseteq A.$$

On dit que $\mathcal{P}(A)$ est **l'ensemble des parties** de A. Cet ensemble joue un rôle important dans de nombreux domaines en mathématiques, comme en probabilité, en statistique, en dénombrement, en topologie ou même en théorie de l'intégration.

Proposition 2. *Pour tout ensemble A, on a*

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \ \text{ et } \ A \in \mathcal{P}(A).$$

On portera une attention particulière à la deuxième relation, tout ensemble est un élément de l'ensemble des parties de cet ensemble. Dans le même ordre d'idée, on notera que l'on a toujours

$$A \in \{A\}$$

car $\{A\}$ est l'ensemble fini constitué d'un seul élément qui est A. Bien entendu

$$\{A\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

1.4. **Complémentaire d'un sous-ensemble dans l'ensemble.** Soit A un ensemble et B une partie de A (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(A)$). On appelle **complémentaire** de B dans A le sous-ensemble de A noté

$$\complement_A B$$

le sous-ensemble de A constitué de tous les éléments $x \in A$ qui ne sont pas dans B. On écrira donc

$$\complement_A B = \{x \in A,\ x \notin B\}.$$

Par exemple le complémentaire de l'ensemble vide dans A est l'ensemble A lui même. Le complémentaire de A dans A est l'ensemble vide.

1.5. **Produit cartésien d'ensembles.** Etant donnés deux ensembles A et B, le produit cartésien de ces deux ensembles est l'ensemble noté

$$A \times B$$

constitué des couples (cette fois l'ordre est important) (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$. Ainsi

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

La notion de produit cartésien s'étend plusieurs facteurs. Par exemple le produit cartésien des trois ensembles A_1,A_2 et A_3 est l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3),\ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}.$$

On prendra garde à la remarque suivante, les ensembles

$$A_1 \times A_2 \times A_3,\ (A_1 \times A_2) \times A_3,\ A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

sont tous différents.

On notera également

$$A^2 = A \times A,\ A^a \times A \times A, \cdots$$

Exercices 1,2,3,4,5

2. Opérations élémentaires sur les ensembles

2.1. L'intersection et la réunion.

Soient B_1 et B_2 deux sous-ensembles d'un ensemble A.

Définition 2. *1. On appelle intersection des sous-ensembles B_1 et B_2 le sous-ensemble de A noté*

$$B_1 \cap B_2$$

formé des éléments communs à B_1 et B_2 :

$$B_1 \cap B_2 = \{x \in A \text{ tels que } x \in B_1 \text{ et } x \in B_2\}.$$

1. On appelle réunion des sous-ensembles B_1 et B_2 le sous-ensemble de A noté

$$B_1 \cup B_2$$

formé des éléments appartenant à l'un au moins des sous-ensembles B_1 et B_2 :

$$B_1 \cup B_2 = \{x \in A \text{ tels que } x \in B_1 \text{ ou } x \in B_2\}.$$

Ainsi un élément de $B_1 \cup B_2$ appartient soit à B_1, soit à B_2 et donc aussi à $B_1 \cap B_2$.

Il est clair que l'on a

$$B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_1, \quad B_1 \cap B_2 = B_2 \cup B_1.$$

2.2. Propriétés des opérations de réunion et d'intersection.

Proposition 3. *Si B_1, B_2 et B_3 sont des sous-ensembles d'un ensemble A, alors*

$$B_1 \cap (B_2 \cap B_3) = (B_1 \cap B_2) \cap B_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

et

$$B_1 \cup (B_2 \cup B_3) = (B_1 \cup B_2) \cup B_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

On dira que les "opérations" $\cap$ et $\cup$ sont associatives.

Proposition 4. *Si B_1, B_2 et B_3 sont des sous-ensembles d'un ensemble A, alors*

$$B_1 \cap (B_2 \cup B_3) = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3).$$

On dira que l'intersection est distributive par rapport à la réunion.

Démonstration. Soit x un élément de $B_1 \cap (B_2 \cup B_3)$ alors $x \in B_1$ et $x \in B_2 \cup B_3$. Ainsi $x \in B_2$ ou $x \in B_3$. Si $x \in B_2$ alors $x \in B_1 \cap B_2$. Si $x \in B_3$ alors $x \in B_1 \cap B_3$. Dans les deux cas $x \in (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3)$. On en déduit

$$B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subseteq (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3).$$

On montre l'inclusion inverse de la même manière. On laisse ceci à titre d'exercice.

Nous pouvons généraliser la notion de complémentaires comme suit :

Définition 3. *Soient B_1 et B_2 deux sous-ensembles d'un ensemble A. Le complémentaire de B_2 dans B_1 noté*

$$\complement_{B_1} B_2$$

est le sous-ensemble de A :

$$\complement_{B_1} B_2 = \{x \in A, \ x \in B_1 \text{ et } x \notin B_2\}.$$

On note également ce sous-ensemble

$$B_1 - B_2.$$

Exercices 6,7,8,9

3. Relations, Relations d'équivalence

3.1. **Notions de relation.** Soit A un ensemble. On appelle relation (binaire) dans A, une propriété concernant les couples (x, y) d'éléments de A. Le schéma d'une relation ressemble donc à ceci

$$\begin{array}{ccc} \textit{sujet} & \textit{verbe} & \textit{image} \\ x \in A & \cdots & y \in A \end{array}$$

Pour abréger, nous caractériserons ces relations par

$$x\mathcal{R}y$$

qui se lira x est en relation avec y.

Exemples

(1) Soit A l'ensemble des droites du plan. Alors D est perpendiculaire à D'
est une relation dans A.

(2) Soit $A = \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Alors $x < y$ est une relation dans $\mathbb{R}$.

(3) La relation d'égalité est également un exemple fort simple de relations.

Définition 4. *Une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble A est dite*
— *(R)* **Réflexive** *si v*

$$x\mathcal{R}x$$

— *(S)* **Symétrique** *si pour tout $x, y \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ implique } y\mathcal{R}x$$

— *(T)* **Transitive** *si pour tout $x, y, z \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \text{ implique } x\mathcal{R}z$$

— *(AS)* **AntiSymétrique** *si pour tout $x, y \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \text{ implique } x = y.$$

3.2. **Relation d'équivalence.**

Définition 5. *Une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble A est dite relation d'équivalence si elle est*
— *(R)* **Réflexive**
— *(S)* **Symétrique**
— *(T)* **Transitive**

Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, $x\mathcal{R}y$ se lit souvent x est équivalent à y.

Exemples

(1) Soit A l'ensemble des droites du plan. Alors
D est parallèle à D'
est une relation d'équivalence. En effet elle est
(a) (R) Réflexive car D est parallèle à elle même,
(b) (S) car si D est parallèle à D' alors D' est parallèle à D

(c) (T) transitive car si D est parallèle à D' et D' parallèle à D'' alors D est parallèle à D''.

Notons que la relation $D \perp D'$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni réflexive, ni transitive. En effet $D \perp D'$ et $D' \perp D''$ implique $D \parallel D''$.

(2) Soit $A = \mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs. On se donne un entier $p \geq 1$. Définissons la relation suivante : soient n et n' des éléments de $\mathbb{Z}$. Alors

n est congru à n' si $n - n'$ est un multiple de p.

Cette relation est d'équivalence. En effet elle est

(a) (R) réflexive car $n - n = 0$ est multiple de p

(b) (S) symétrique car si $n - n' = kp$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $n' - n = (-k)p$ et $-k \in \mathbb{Z}$.

(c) (T) Transitive, car si $n - n' = kp$ et $n' - n'' = k_1 p$ avec $k, k_1 \in \mathbb{Z}$, alors

$$n - n'' = n - n' + n' - n'' = kp + k_1 p = (k + k_1)p$$

et $n - n''$ est aussi un multiple de p.

Cette relation d'équivalence est souvent noté

$$n \equiv n' \pmod{p}$$

et se lit n est congru à n' modulo p. Nous étudierons plus loin et en détail cette relation, qui est le point central de l'arithmétique.

(3) La relation d'égalité est également un exemple fort simple de relation d'équivalence.

3.3. **Classes d'équivalence.** Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Etant donné $x \in A$, on appelle **classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$** l'ensemble $\mathcal{C}_x$ formé des $y \in A$ vérifiant

$$x \mathcal{R} y.$$

Cet ensemble n'est jamais vide car il contient x car la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors si x et y sont équivalents modulo $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $x \mathcal{R} y$, alors les classe d'équivalences coïncident :*

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y.$$

Inversement deux éléments qui ont même classe d'équivalence sont équivalents modulo $\mathcal{R}$.

Démonstration. En effet si $x \mathcal{R} y$, alors par définition de $\mathcal{C}_x$, $y \in \mathcal{C}_x$ ce qui implique $\mathcal{C}_y \subseteq \mathcal{C}_x$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on a aussi $y \mathcal{R} x$ et donc $x \in \mathcal{C}_y$. D'où $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}_y$ et donc $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Réciproquement si $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$, comme $y \in \mathcal{C}_y$, alors $y \in \mathcal{C}_x$ et donc y est équivalent à x.

Proposition 6. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors si x et y ne sont équivalents pas modulo $\mathcal{R}$, alors les classe d'équivalences sont disjointes :*

$$\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$$

Démonstration. En effet soit $z \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$. On a donc $z \in \mathcal{C}_x$ et donc $z \mathcal{R} x$ et aussi $z \in \mathcal{C}_y$ et donc $z \mathcal{R} y$. Comme la relation d'équivalence est transitive, on en déduit $x \mathcal{R} y$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit qu'un tel z n'existe pas et donc $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$.

Conséquences. Etant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A, les classes d'équivalence ont les propriétés suivantes

(1) Soient $\mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_y$ deux classes. Alors soit $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$, soit $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y. = \emptyset$.

(2) La réunion de toutes les classes d'équivalence est l'ensemble A en entier.

On dit alors que l'ensemble des classes d'équivalence associées à la relation $\mathcal{R}$ forme une partition de A. Donnons la définition générale de cette notion :

Définition 6. *Soit $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous-ensembles de A. Cette famille forme une partition finie de A si*

(1) $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$,

(2) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{i=n} B_i = A$.

Notons, sans le démontrer, qu'en fait toute partition peut être vue comme une partition donnée par les classe d'équivalence d'une relation d'équivalence. Chaque sous-ensemble de cette partition étant alors constitué d'éléments équivalents.

Exemple. Considérons dans A relation de congruence modulo 2, soit

$$x \equiv y \pmod 2.$$

Ceci signifie que $n - n'$ est un multiple de 2. On a donc

$$n - n' = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Déterminons les classes d'équivalence. Prenons tout d'abord $n = 0$ Alors n' est équivalent à 0 si $n' = 2k$ c'est-à-dire si n' est un nombre pair. On peut donc écrire

$$\mathcal{C}_0 = 2\mathbb{Z} = \{2k, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Prenons maintenant $n = 1$. Il n'est pas dans la classe de 0. Ainsi sa classe est distincte de $\mathcal{C}_0$. Dans ce cas $n \equiv 1$ si

$$n = 1 + 2k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci signifie que $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des nombres impairs. Comme tout entier est soit pair soit impair, il n'existe plus d'autre classe d'equivalence distincte de ces deux. On a bien

$$\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset,$$

et

$$\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 = \mathbb{Z}.$$

Exercices 10,11,12,13

4. Relations d'ordre

4.1. Definition.

Définition 7. *Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensembles A est appelée relation d'ordre si elle est*
- *(R)* **Réflexive**
- *(AS)* **AntiSymétrique**
- *(T)* **Transitive**

Un ensemble A muni d'une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné.

Exemples.

(1) Sur les ensembles $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, la relation
$$x \leq y$$
est une relation d'ordre. Notons que l'inégalité stricte
$$x < y$$
n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

(2) Dans l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ la relation $\subseteq$ est une relation d'ordre.

(3) Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \cdots\}$ la relation
$$x \text{ divise } y$$
relation d'ordre.

4.2. **Ensembles totalement ordonnés.** Dans le premier exemple ci-dessus, on peut remarquer que tous les éléments sont comparables. Ceci signifie que quel que soient x et y dans A (ici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Il n'en est plus de même dans les deux autres exemples. Par exemple, dans le dernier, les éléments 2 et 3 ne sont pas comparables, on n' a ni 2 divise 3, ni 3 divise 2.

Définition 8. *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur A. Deux éléments x et y de A sont dits comparables si l'on a*
$$x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x.$$
Si deux éléments quelconques de A sont comparables, on dit que l'ensemble ordonné A est totalement ordonné.

Par exemple, comme nous l'avons vu ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ la relation d'ordre $x \leq y$ est totalement ordonné. Par contre pour tout ensemble A, l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ avec la relation d'ordre $B_1 \subseteq B_2$ n'est pas totalement ordonnée.

Exercices 14,15

5. Applications et fonctions

5.1. **Définition.**

Définition 9. *Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux ensembles. On appelle fonction définie sur $\mathbb{X}$ et à valeurs dans $\mathbb{Y}$ toute opération consistant à faire correspondre à chaque élément $x \in \mathbb{X}$ un élément bien déterminé de $\mathbb{Y}$;*

L'ensemble $\mathbb{X}$ s'appelle l'ensemble de définition de la fonction. Au lieu de dire "soit une fonction ayant $\mathbb{X}$ comme ensemble de départ et $\mathbb{Y}$ comme ensemble d'arrivée, on dira plutôt : **soit une application de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$**. Ainsi les mots fonctions et applications sont des synonymes mais l'usage du mot application permet d'être plus court dans l'écriture. On utilisera plus souvent application que fonction. On dira donc,
$$\text{soit } f \text{ une application de } \mathbb{X} \text{ dans } \mathbb{Y}$$
ou plus simplement
$$\text{soit une application } f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$
ou bien

soit une application $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$.

Lorsque $\mathbb{Y}$ est l'ensemble des nombres réels, on dit que f est une fonction à valeurs réelles. Si $\mathbb{X}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction d'une variable réelle. Lorsque f est une fonction réelle d'une variable réelle, souvent cette fonction est désignée par une formule qui permet de calculer $f(x)$. Par exemple, on parlera de la fonction

$$f(x) = x^3 - x.$$

Dans ce cas, il faudra prendre garde de bien déterminer le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ ensemble de départ également appelé dans ce cas l'ensemble de définition de f. Par exemple, considérons la fonction réelle donnée par

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}}.$$

Elle est définie si

(1) le dénominateur est non nul, soit $x - 1 \neq 0$,

(2) la fonction sous le radical est positive soit $x - 1 \geq 0$.

En conclusion, cette fonction est définie sur l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R},\ x - 1 > 0\}$.

Rappelons à ce propos les résultats suivants :

(1) La fonction réelle donnée par $\sqrt{g(x)}$ est définie si et seulement si $g(x) \geq 0$ et il faudra résoudre cette inégalité,

(2) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes est définie si et seulement si $Q(x) \neq 0$. Dans ce cas il est nécessaire de résoudre l'équation $Q(x) = 0$,

(3) $\ln(g(x))$ est définie si et seulement si $g(x) > 0$.

5.2. **Composition des applications.** Soient A_1,A_2 et A_3 trois ensembles et

$$f : A_1 \to A_2, \quad g : A_2 \to A_3$$

deux applications. Alors l'application

$$x \in A_1 \to g(f(x)) \in A_3$$

est une application de A_1 dans A_3 appelée la composition de g et f et notée $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3 + x$. Alors

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = (\cos(x))^3 + \cos x.$$

Notons que dans ce cas la fonction composée $f \circ g$ est aussi définie (ce qui n'est pas toujours le cas et on a

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3 + x) = \cos(x^3 + x).$$

5.3. **Applications injectives, surjectives et bijectives.** Soit $f : A \to B$ une application.

Définition 10. *(1) On dit que f est* **injective** *si deux éléments distincts de A ont des images distinctes, autrement dit si*

$$x \neq x' \ (x, x' \in A) \ \text{ implique } \ f(x) \neq f(x').$$

(2) On dit que f est **surjective** *si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.*

(3) On dit que f est **bijective** *si elle est injective et surjective.*

On notera que la condition d'injectivité est équivalente à

$$\text{pour tout } x, x' \in A, \text{ alors } f(x) = f(x') \text{ implique } x = x'.$$

La condition de subjectivité s'écrit aussi :

$$\text{Pour tout } y \in B, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

5.4. **Image réciproque.** Soit $f : A \to B$ une application. On appelle image directe de A par f et on le note $f(A)$ le sous-ensemble de B définie par

$$f(A) = \{f(x), \ x \in A\}.$$

Ainsi, dire que f est surjective se traduit par $B = f(A)$.

Soit $B_1 \subseteq B$ un sous-ensemble de B. On appelle image réciproque de B_1 par f le sous-ensemble de A, noté $f^{-1}(B_1)$ dont les éléments sont les élémentts $x \in A$ tels que $f(x) \in \mathbb{B}_1$:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A, \ f(x) \in B_1\}.$$

ATTENTION Il ne faut pas confondre la notation f^{-1} que nous venons de présenter avec la fonction f^{-1} qui est notée de la même manière mais qui n'est définie que si f et bijective et qui représente dans ce cas l'application inverse :

$$f \circ f^{-1} = Id_B, \quad f^{-1} \circ f = Id_A$$

où Id désigne l'application identité.

Exercices 16 à 28

EXERCICES Chapitre 1

Exercice 1.

(1) Soient les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d, e\}$. Compléter avec l'un des symboles $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ les formules suivantes

$$a \cdots A, \quad a \cdots B, \quad \{a\} \cdots A, \quad \{a, c\} \cdots B, \quad \{a, c\} \cdots A,$$
$$A \cdots B, \quad \emptyset \cdots B, \quad c \cdots B, \quad \{b\} \cdots \mathcal{P}(A)$$

(2) Compléter avec l'un des symboles $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ les formules suivantes

$$\{-1\} \cdots \mathbb{N}, \quad \{-1, 0, 2\} \cdots \mathbb{Z}, \quad \{-\frac{1}{3}\} \cdots \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \cdots \mathbb{Q}, \quad \pi \cdots]-\infty, 3.14].$$

Exercice 2. Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 5\}, \quad B = [\sqrt{2}, \sqrt{10}] \cap \mathbb{N}, \quad B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, 2 \leq x^2 + 2y < 5\}.$$

Exercice 3.

(1) Soit A l'ensemble fini à un élément $A = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A)$. Quelle est sa cardinalité (combien d'éléments contient-il) ?

(2) Soit B l'ensemble fini à trois éléments $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(B)$. Quelle est sa cardinalité ?

(3) Plus généralement, soit E un ensemble fini à n éléments. Quelle est la cardinalité de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 4. L'opération consistant à passer d'un ensemble A à l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ permet de construire des ensembles de plus en plus compliqués.

(1) Combien d'éléments contient l'ensemble vide $\emptyset$?

(2) Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset)$. Combien d'éléments contient-il ?

(3) Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Combien d'éléments contient-il ?

(4) Même question avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. Soient A et B deux ensembles. Montrer que si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, alors $A = B$.

Exercice 6. Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Déterminer les ensembles

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A - (A \cap B), \quad A \times B, \quad \mathcal{P}(A).$$

Exercice 7. Soit l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et ses parties $B_1 = \{a, b, c\}$ et $B_2 = \{b, d\}$.

(1) Déterminer les ensembles

$$B_1 \cap B_2, \; B_1 \cup B_2, \quad \complement_A B_1, \quad \complement_A B_2, \quad \complement_A (B_1 \cap B_2), \quad B_1 - B_2.$$

(2) Déterminer les ensembles :

$$\mathcal{P}(B_1), \quad \mathcal{P}(B_2), \quad \mathcal{P}(B_1 \cap B_2), \mathcal{P}(B_1) \cap \mathcal{P}(B_2), \quad \mathcal{P}(B_1 \times B_2).$$

Exercice 8. Soit A un ensemble et B_1,B_2 deux sous-ensembles. Montrer les relations suivantes

(1) $B_1 \cup \complement_A B_1 = A, \quad B_1 \cap \complement_A B_1 = \emptyset, \quad \complement_A(\complement_A B_1) = B_1$

(2) $\complement_A(B_1 \cup B_2) = \complement_A B_1 \cap \complement_A B_2$.

(3) $\complement_A(B_1 \cap B_2) = \complement_A B_1 \cup \complement_A B_2$.

Exercice 9. Soient B_1 et B_2 deux sous-ensembles de A. On appelle différence symétrique de B_1 et B_2 le sous-ensemble, noté $B_1 \Delta B_2$, et défini par

$$B_1 \Delta B_2 = \{x \in A, (x \in B_1 \text{ et } x \notin B_2) \text{ ou } (x \notin B_1 \text{ et } x \in B_2)\}.$$

Montrer les relations

(1) $B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) - (B_1 \cap B_2)$,

(2) $B_1 \Delta B_2 = ((B_1 - (B_1 \cap B_2)) \cup (B_2 - (B_1 \cap B_2)$,

(3) $(B_1 \Delta B_2) \cap B_1 = B_1 - (B_1 \cap B_2)$.

Exercice 10. Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :

$$A \mathcal{R} B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \complement_E B.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 11. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation

$$n \mathcal{R} m \ \text{ si et seulement si } n + m \text{ est pair.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Exercice 12. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.

Exercice 13. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation sur E en posant, pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$x \mathcal{R} x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x').$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence $cl(x)$ de l'élément $x \in E$

(3) Notons par $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que l'application

$$\pi : E/\mathcal{R} \to F$$

donnée par

$$\pi(cl(x)) = f(x)$$

est bien définie.

Exercice 14. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}x' \iff \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x' = x^n.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 15. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff x_1 < x_2, \text{ ou si } x_1 = x_2 \text{ alors } y_1 \leq y_2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 16. Les ensembles suivants

$G_1 = \{(0,1),(1,0),(0,3)\},\ G_2 = \{(0,1),(1,0),(2,3)\},\ G_3 = \{(n,\sqrt{n}), n \in \mathbb{N}\},\ G_4 = \{(n^2,n), n \in \mathbb{Z}\}$

sont-ils des graphes d'applications ? Si non, dites pourquoi. Si oui donner l'ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

Exercice 17. Soit $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2,3\}$. Ecrire toutes les bijections de E dans F.

Exercice 18. Soit $E = \{a,b\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

(1) Existe-t-il une bijection de E dans F ?

(2) Ecrire toutes les injections de E dans F .

(3) Ecrire toutes les surjections de F dans E.

Exercice 19. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{llll}
f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f_1(n) = n^2 & f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & f_2(n) = n^2 \\
f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f_3(n) = n+1 & f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f_4(n) = n+1 \\
f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5(x) = |x-1| & f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_6(x,y) = (x+y, x-y)
\end{array}$$

Exercice 20. Soit A un ensemble à 3 éléments et B un ensemble à 4 éléments.

(1) Combien y a-t-il d'applications de A dans $A \times B$?

(2) Combien y a-t-il de bijections de A dans B ? de B dans B ?

(3) Combien y a-t-il d'injections de A dans B ? de B dans A ?

(4) Combien y a-t-il de surjections de A dans B ?

Exercice 21. On considère les ensembles $E = \{-2,-1,2,4\}$ et $F = \{-1,0,1,2,3,4\}$ et $f : E \to F$ l'application définie par : $f(n) = |n-1|$.

(1) Soit G le graphe de f. Ecrire G en extension.

(2) L'application f est-elle injective ? surjective ? (justifiez vos réponses).

(3) Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{0,1,2\})$.

Exercice 22. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |4-2x| + |x+3|$.

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective. Donner des exemples d'intervalles I_1, I_2, J_1 et J_2 tels que $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est injective, $f : \mathbb{R} \to J_1$ est surjective et $f : I_2 \to J_2$ est bijective

Exercice 23. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x2 + 6x - 2$.

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Déterminer les ensembles :

$$f([0,4]),\ f^{-1}(\{11\}),\ f^{-1}(\{6,7\}),\ f^{-1}([2,+\infty[),\ f^{-1}(]-\infty,6]).$$

Exercice 24. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0, \\ -x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

(3) Déterminer $f([-2,1])$ et $f(]0,+\infty[)$.

(4) Déterminer $f^{-1}(f(]0,+\infty[))$.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par : $f(x) = 3x^3 - 12x - 5$.

(1) Soit $A = \{-1,1,2\}$. Déterminer $f(A)$.

(2) Déterminer $f^{-}(\{5\})$. Qu'en déduit-on pour f ?

(3) En raisonnant par l'absurde, montrer que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Qu'en déduit-on pour f ?

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

(1) Déterminer $f(-3)$, $f(\{-3\})$ et $f(\{-3,1\})$.

(2) Déterminer l'antécédent de 3 ; 1 a-t-il un antécédent ? Qu'en déduit-on pour f ?

(3) Montrer que tout $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$ possède un unique antécédent que l'on déterminera.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ? Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Exercice 28. Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}, \quad g \circ f \text{surjective} \Rightarrow \text{surjective}.$$