

Licence 1. Mathématiques et Informatique

Mathématiques : ARITHMETIQUE et ALGÈBRE

Cours Elisabeth Remm, Guido Ahumada

EXERCICES Chapitre 7

Groupes - Anneaux - Corps

Exercice 1. Dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, on considère la loi de composition interne, notée $*$ définie par

$$x * y = x + y + xy.$$

Cette loi est-elle commutative, associative ? Étudier l'existence d'un élément neutre et d'un symétrique pour un élément donné.

Exercice 2. Résoudre les mêmes questions pour la loi interne, notée \bullet définie par

$$x \bullet y = x - y + xy.$$

Exercice 3.

- (1) L'ensemble \mathbb{N} muni de l'addition est-il un groupe ?
- (2) L'ensemble \mathbb{Z} muni de la multiplication est-il un groupe ?
- (3) Soit $2\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs pairs. Est-il un groupe pour l'addition ? En est-il de même pour l'ensemble des entiers relatifs impairs ?

Exercice 4.

- (1) Montrer que si dans un groupe multiplicatif le produit de deux éléments est égal à l'un d'eux, l'autre élément est égal à 1.
- (2) Soit G un groupe abélien multiplicatif. Résoudre l'équation

$$x \cdot a \cdot b \cdot x \cdot c = b \cdot x \cdot a.$$

- (3) Montrer qu'un groupe où deux éléments quelconques vérifient la condition

$$(ab)^2 = a^2b^2$$

est abélien.

(4) Montrer que si dans un groupe tout élément vérifie

$$a = a^{-1}$$

alors ce groupe est abélien.

Exercice 5. Ecrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Ces ensembles sont-ils des groupes pour l'addition, pour la multiplication ?

Exercice 6. Déterminer les tables de multiplications des groupes d'ordre 2, 3 et 4.

Exercice 7. Etudier les isométries conservant globalement un rectangle. Montrer qu'elles forment un groupe (pour la composition) à 4 éléments. Ecrire la table.

Exercice 8. Etudier les isométries conservant globalement un triangle équilatéral. Montrer qu'elles forment un groupe (pour la composition) à 6 éléments. Ecrire la table.

Exercice 9. Soit S_3 l'ensemble des permutations d'un ensemble $E = \{A, B, C\}$ à trois éléments.

- (1) Montrer que c'est un groupe (pour la composition). Est-il abélien ?
- (2) Ecrire la table de groupe.
- (3) Déterminer tous les sous-groupes de S_3

Exercice 10.

- (1) Montrer que les ensembles $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont des anneaux pour l'addition et la multiplication. Sont-ils des corps ?
- (2) Même question pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que l'ensemble des nombres réels de la forme

$$a + b\sqrt{3}$$

est un anneau. Est-il un corps ?