FST Mulhouse.

Licence 1 Maths-Info

Mathématiques : ARITHMETIQUE-ALGEBRE

Elisabeth REMM

Chapitre 6

Fractions rationnelles

Table des matières

1. Définition 1
1.1. Fractions rationnelles 1
1.2. Partie entière d'une fraction rationnelle 2
1.3. Pôles d'une fraction rationnelle 2
2. Décomposition en éléments simples 2
2.1. Décomposition en éléments simples de première espèce 2
2.2. Calcul pratique des coefficients 3
2.3. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce : cas réel 4
3. Exemples 4
3.1. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^3+2X}{X^2-2X-3}$ 4
3.2. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X-2)(X-1)^3}$ 5
3.3. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}$ 6

1. Définition

1.1. **Fractions rationnelles.** Une fraction rationnelle à coefficient dans le corps K se met sous la forme

$$\frac{N(X)}{D(X)}$$

où $N(X)$ et $D(X)$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $D(X)$ étant non nul.

Nous dirons que deux fractions rationnelles $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ et $\dfrac{N_1(X)}{D_1(X)}$ sont égales si

$$N(X)D_1(X) = N_1(X)D(X)$$

(produit en croix).

Proposition 1. *Soit* $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ *une fraction rationnelle sur* $\mathbb{K}$*. Il existe des polynômes* $N_1(X)$ *et* $D_1(X)$ *premiers entre eux tels que*

$$F(X) = \frac{N_1(X)}{D_1(X)}.$$

Démonstration. Soit $G(X)$ le PGCD de $N(X)$ et $D(X)$. On a donc $N(X) = G(X)N_1(X)$, $D(X) = G(X)D_1(X)$ et $N_1(X)$, $D_1(X)$ premiers entre eux. Ainsi

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = \frac{G(X)N_1(X)}{G(X)D_1(X)} = \frac{N_1(X)}{D_1(X)}.$$

1.2. **Partie entière d'une fraction rationnelle.**

Définition 1. *On appelle partie entière d'une fraction rationnelle* $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ *le polynôme* $E(X)$ *quotient de la division euclidienne de* $N(X)$ *par* $D(X)$*.*

La division euclidienne de $N(X)$ par $D(X)$ s'écrit

$$N(X) = E(X)D(X) + R(X)$$

avec d°R(X) < d°D(X). Nous en déduisons

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}.$$

Notons que $E(X)$ est nul si d°D(X) > d°N(X).

1.3. **Pôles d'une fraction rationnelle.** On appelle pôles d'une fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ les racines (ou les zéros) du dénominateur $D(X)$. Si α est une racine multiple d'ordre k, nous dirons que α est un pôle d'ordre k.

2. Décomposition en éléments simples

2.1. **Décomposition en éléments simples de première espèce.** Soit

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

une fraction rationnelle où $E(X)$ est sa partie entière. Supposons que

$$D(X) = (X-\alpha)^a(X-\beta)^b.$$

Théorème 1. *Il existe une décomposition unique*

$$F(x) = E(X) + \frac{R(X)}{(X-\alpha)^a(X-\beta)^b} = E(X) + \frac{A_1}{(X-\alpha)^a} + \cdots + \frac{A_a}{X-\alpha} + \frac{B_1}{(X-\beta)^b} + \cdots + \frac{B_b}{X-\beta}$$

avec $A_1 \cdots, A_a, B_1, \cdots, B_b \in \mathbb{K}$.

Le deuxième membre est appelé décomposition en éléments simples de première espèce.

2.2. **Calcul pratique des coefficients.**

(1) Supposons ici que
$$\frac{R(X)}{D(X)} = \frac{R(X)}{(X-\alpha)(X-\beta)^b}$$
c'est-à-dire α est une racine simple. La décomposition s'écrit donc
$$\frac{R(X)}{(X-\alpha)(X-\beta)^b} = \frac{A_1}{X-\alpha} + \frac{B_1}{(X-\beta)^b} + \cdots + \frac{B_b}{X-\beta}$$
Calcul du coefficient A_1. Une manière simple, dans ce cas, est de multiplier les deux mambres par $X-\alpha$:
$$\frac{R(X)}{(X-\alpha)(X-\beta)^b}(X-\alpha) = \frac{A_1}{X-\alpha}(X-\alpha) + (\frac{B_1}{(X-\beta)^b} + \cdots + \frac{B_b}{X-\beta})(X-\alpha)$$
ce qui donne après simplification
$$\frac{R(X)}{(X-\beta)^b} = A_1 + (\frac{B_1}{(X-\beta)^b} + \cdots + \frac{B_b}{X-\beta})(X-\alpha).$$
Faisons maintenant $X=\alpha$. On obtient
$$\frac{R(\alpha)}{(\alpha-\beta)^b} = A_1$$
ce qui donne A_1 (rappelons que $\alpha \neq \beta$).

(2) Supposons maintenant que α soit racine d'ordre k avec $k > 1$. La méthode suivante permet d'obtenir par une seule opération tous les coefficients A_i. Posons
$$X = a + T$$
La fraction rationnelle devient alors
$$\frac{R(X)}{(X-\alpha)^a(X-\beta)^b} = \frac{R(T+\alpha)}{(T)^a(T+\alpha-\beta)^b}.$$
Posons $R_1(T) = R(T+\alpha)$. Alors nous avons a décomposer
$$\frac{R_1(T)}{(T)^a(T+\alpha-\beta)^b}.$$
La division suivant les puissance croissantes de $R_1(T)$ par $F_1(T) = (T+\alpha-\beta)^b$ jusqu'à l'ordre $a-1$ s'écrit
$$R_1(T) = F_1(T)(A_1 + A_2T + \cdots + A_aT^{a-1}) + T^aR_2(T).$$
Ainsi
$$\frac{R_1(T)}{(T+\alpha-\beta)^b} = A_1 + A_2T + \cdots + A_aT^{a-1} + T^a\frac{R_2(T)}{(T+\alpha-\beta)^b}$$
et donc
$$\frac{R_1(T)}{(T)^a(T+\alpha-\beta)^b} = \frac{A_1}{T^a} + \frac{A_2}{T^{a-1}} + \cdots + \frac{A_{a-1}}{T^2} + \frac{A_a}{T} + \frac{R_2(T)}{(T+\alpha-\beta)^b}$$
On obtient bien ainsi tous les coefficients liés au pôle α.

2.3. **Décomposition en éléments simples de deuxième espèce : cas réel.** Cette décomposition ne s'applique que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. dans le cas complexe, seule la décomposition en éléments simples de première espèce est à envisager.

Soit

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

une fraction rationnelle où $E(X)$ est sa partie entière. Supposons que

$$D(X) = (X-\alpha)^a (X^2 + pX + q)^b$$

où $X^2 + pX + q$ est un polynôme réel irréductible (sans racine réelle).

Théorème 2. *Il existe une décomposition unique*

$$\begin{aligned} F(x) &= E(X) + \frac{R(X)}{(X-\alpha)^a (X^2+pX+q)^b} \\ &= E(X) + \frac{A_1}{(X-\alpha)^a} + \cdots + \frac{A_a}{X-\alpha} \\ &\quad + \frac{B_1 X + C_1}{(X^2+pX+q)^b} + \cdots + \frac{B_b X + C_b}{X^2+pX+q} \end{aligned}$$

avec $A_1 \cdots, A_a, B_1, \cdots, B_b, C_1, \cdots, C_b \in \mathbb{R}$.

Cette décomposition est appelée décomposition en éléments simples de deuxième espèce car elle contient des facteurs irréductibles de degré 2.

Une méthode simple de trouver les coefficients de deuxième espèce est de décomposer les éléments simples de degré 2 en facteurs du premier degré à coefficients complexes, d'écrire la décomposition en éléments simples de première espèce complexe et de regroupe ensuite les termes conjugués.

3. Exemples

3.1. **Décomposition en éléments simples de $\frac{X^3+2X}{X^2-2X-3}$.** Déterminons la partie entière de $\frac{X^3+2X}{X^2-2X-3}$. La division euclidienne donne

$$X^3 + 2X = (X^2 - 2X - 3)(X+2) + 9X + 6.$$

Ainsi

$$\frac{X^3+2X}{X^2-2X-3} = X + 2 + \frac{9X+6}{X^2-2X-3}.$$

Il nous reste à déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{9X+6}{X^2-2X-3}$. Factorisons le dénominateur

$$X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$$

la racine du trinôme $x^2 - 2x - 3$ étant 3 et -1. On en déduit

$$\frac{9X+6}{X^2-2X-3} = \frac{9X+6}{(X-3)(X+1)} = \frac{A_1}{X-3} + \frac{A_2}{X+1}.$$

Calculons A_1. Pour cela multiplions les deux membres de la dernière identité par $X-3$. Ceci donne

$$\frac{9X+6}{(X-3)(X+1)}(X-3) = \frac{A_1}{X-3}(X-3) + \frac{A_2}{X+1}(X-3)$$

soit

$$\frac{9X+6}{X+1} = A_1 + \frac{A_2}{X+1}(X-3)$$

en en faisant $X=3$ on obtient

$$\frac{33}{4} = A_1 + 0$$

d'où

$$A_1 = \frac{33}{4}.$$

Procédons de même pour le calcul de A_2. On obtient dans ce cas

$$\frac{-3}{-4} = 0 + A_2$$

et donc

$$A_2 = \frac{3}{4}.$$

Conclusion

$$\frac{X^3+2X}{X^2-2X-3} = X + 2 + \frac{33}{4(X-3)} + \frac{3}{4(X+1)}.$$

3.2. **Décomposition en éléments simples de** $\frac{1}{(X-2)(X-1)^3}$**.** Dans ce cas, la partie entière est nulle. La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{1}{(X-2)(X-1)^3} = \frac{A_1}{X-2} + \frac{B_1}{(X-1)^3} + \frac{B_2}{(X-1)^2} + \frac{B_3}{X-1}.$$

Calculons A_1 en utilisant la méthode ci-dessus, on multiplie tout par $X-2$ et après simplification on fait $X=2$. Ceci nous donne

$$A_1 = 1.$$

Calculons les coefficients B_1, B_2, B_3. Pour cela posons

$$X - 1 = T$$

La décomposition s'écrit, en remplaçant X par $T+1$:

$$\frac{1}{(T-1)T^3} = \frac{A_1}{T-1} + \frac{B_1}{T)^3} + \frac{B_2}{T^2} + \frac{B_3}{T}.$$

La division suivant les puissances croissantes de 1 par $T-1$ à l'ordre 3 s'écrit :

$$\frac{1}{-1+T} = -1 - T - T^2 + \frac{T^3}{-1+T}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{(-1+T)T^3} = -\frac{1}{T^3} - \frac{T}{T^3} - \frac{T^2}{T}^{3} + \frac{T^3}{(-1+T)T^3}$$

soit

$$\frac{1}{(-1+T)T^3} = -\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T} + \frac{T^3}{(-1+T)T^3}$$

ou bien encore

$$\frac{1}{(X-2)(X-1)^3} = \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X-1)} + \frac{(X-1)^3}{(X-2)(X-1)^3}.$$

Ainsi

$$B_1 = -1,\ B_2 = -1,\ B_3 = -1.$$

La décomposition cherchée est donc

$$\frac{1}{(X-2)(X-1)^3} = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}.$$

3.3. **Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}$.** Dans ce cas, il existe un élément simple de deuxième espèce. La décomposition s'écrit :

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{B_1X+B_2}{X^2+X+1}.$$

Commençons par calculer A_1. On multiplie tout par $X-1$, on simplifie et on fait $X=1$ ce qui donne

$$A_1 = \frac{1}{3}.$$

Calculons à présent B_1 et B_2.

Première méthode : décomposition dans $\mathbb{C}$. Les racines complexes de X^2+X+1 sont j et j^2 où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j}$ le conjugué de j. On en déduit

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{1}{(X-1)(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{C_1}{X-j} + \frac{\bar{C}_1}{X-\bar{j}}.$$

On calcule le nombre complexe C_1 comme ci-dessus, on multiplie par $X-j$ on simplifie et on pose $X=j$, ce qui donne

$$\frac{1}{(j-1)(j-\bar{j})} = C_1.$$

Ainsi

$$C_1 = \frac{j}{3}.$$

La décomposition complexe s'écrit donc

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{1}{(X-1)(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{1}{3(X-1)} + \frac{j}{3(X-j)} + \frac{\bar{j}}{3(X-\bar{j})}.$$

Pour déterminer la décomposition dans $\mathbb{R}$, il nous reste à regroupe les deux derniers termes complexes conjugués.

$$\frac{j}{3(X-j)} + \frac{\bar{j}}{3(X-\bar{j})} = \frac{j(X-\bar{j}) + \bar{j}(X-j)}{3(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{-X-2}{3(X^2+X+1)}.$$

On obtient donc

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{1}{3(X-1)} + \frac{-X-2}{3(X^2+X+1)}.$$

Deuxième méthode : par identification. Nous calculons A_1 comme ci-dessus ce qui donne

$$ds\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}=\frac{1}{3(X-1)}+\frac{B_1X+B_2}{X^2+X+1}.$$

Réduisons au même dénominateur le second membre

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}=\frac{(X^2+X+1)+3(X-1)(B_1X+B_2)}{3(X-1)(X^2+X+1)}$$

d'où

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}==\frac{(1+3B_1)X^2+(1+3B_2-3B_1)X+1-3B_2}{3(X-1)(X^2+X+1)}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 1+3B_1=0, \\ 1+3B_2-3B_1=0, \\ 1-3B_2=3 \end{cases}$$

et donc

$$B_1=\frac{-1}{3},\ B_2=\frac{-2}{3}.$$

La décomposition est donc

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}=\frac{1}{3(X-1)}+\frac{-X-2}{3(X^2+X+1)}.$$