Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1. Physique-Chimie

Mathématiques : Outils Géométrie
Introduction à l'algèbre linéaire

Cours TD - Elisabeth Remm

EXERCICES Chapitre 2

Espaces vectoriels- Sous espaces vectoriels

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des espaces vectoriels réels ?
(1) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 0\}$.
(2) $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 x_2 = 0\}$.
(3) $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \cos x_1 + 2e^{x_2} - x_3^2 = 0\}$.
(4) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$.

Exercice 2. Montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation linéaire

$$ax + by + cz = 0$$

est muni d'une structure d'espace vectoriel réel.

Exercice 3. On considère l'ensemble E formé des couples de réels (x, y). On considère dans E les lois suivantes
(1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
(2) $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

A-t-on sur E une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel réel. Montrer
(1) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\alpha\vec{0} = \vec{0}$,
(2) pour tout $\vec{u} \in E$ on a $0\vec{u} = \vec{0}$ pour tout $\vec{u} \in E$
(3) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{u} \in E$ on a $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$,
(4) pour que $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ il faut et il suffit que $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
(5) pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ implique $\vec{v} = \vec{w}$,
(6) Montrer en développant de deux manières différentes $(1+1)(\vec{u}+\vec{v})$ que pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle x continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur le segment $[0,1]$.

(1) Définir les lois 'addition et multiplication externe) qui munissent $\mathcal{F}$ d'une structure d'espace vectoriel réel.

(2) Soit $\mathcal{F}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions vérifiant $2f(0) = f(1)$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?

(3) Soit $\mathcal{F}_2$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions vérifiant $f(0) + 1 = f(1)$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?

Exercice 6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel réel E. Montrer que l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs, c'est-à-dire, $\vec{X} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 7. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les s.e.v.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + z = 0\} \qquad B = \{(a+b, 2a, 3b) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

(1) Vérifier qu'il s'agit bien de s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une famille génératrice pour chacun d'eux.

(3) Déterminer $A \cap B$ et donner une famille génératrice de $A \cap B$.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, on considère les s.e.v.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vérifier qu'il s'agit bien de s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et donner une famille génératrice pour chacun d'eux.

Exercice 10. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = (1,2)$ et $\vec{v} = (3,4)$

(1) Déterminer les combinaisons linéaires $a\vec{u} + b\vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui peuvent donner le vecteur nul.

(2) Ecrire le vecteur $\vec{i} = (1,0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Même question pour le vecteur $\vec{j} = (0,1)$.

(3) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Ecrire le vecteur $\vec{w} = (x,y)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

(4) En déduire que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{X} = (2, 14, -34, 7)$ de $\mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{X_1} = (1, 4, -5, 2)$ et $\overrightarrow{X_2} = (1, 2, 3, 1)$?

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-espace engendré par $\overrightarrow{X_1} = (1,3,5)$ et $\overrightarrow{X_2} = (-1, 0, 2)$. Déterminer un autre sytème engendrant le mêm sous-espace.

Exercice 13. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{X_1} = (1,2,3), \ \overrightarrow{X_2} = (2,-1,1).$$

Montrer qu'ils engendrent le même sous-espace vectoriel que

$$\overrightarrow{Y_1} = (1,0,1), \ \overrightarrow{Y_2} = (0,1,1).$$

Exercice 14. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère le plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation

$$x - y - z = 0.$$

(1) Déterminer un vecteur directeur de ce plan.
(2) En déduire l'équation de la droite vectorielle $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$
(3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.