Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES - Chapitre 9

Diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ -25 & 17 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3.

(1) Soit M_1 une matrice diagonale d'ordre n. Calculer M_1^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
(2) Soit M_2 une matrice diagonalisable d'ordre n. Calculer M_2^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que l'on a la relation $f^2 = f + 2Id$.
(2) Montrer que M est diagonalisable et le diagonaliser.
(3) On dit qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ est cyclique s'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{v, g(v), g^2(v)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme f est-il cyclique ?

Exercice 5

(1) A quoi ressemble une matrice diagonale de rang 1 ?

(2) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ?

(3) En étudiant le polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1,donner une CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable. (on étudiera en particulier la trace d'une telle matrice).

Exercice 6 Une matrice carrée M d'ordre n est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$M^l k = 0.$$

(1) Déterminer les valeurs propres d'une telle matrice ?

(2) A quelle condition M est diagonalisable ?

Exercice 7. Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

avec $a + b = 1$ et $c + d = 1$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

bf Exercice 9. On considère la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Déterminer, suivant les valeurs de a, b, c les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

Exercice 10. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices rélles B telles que $B^2 = A$.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Diagonaliser f.

(2) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et soit la suite de vecteurs

$$v_0 = v, v_1 = f(v), \cdots, v_n = f(v_{n-1}), \cdots$$

Soit F_v le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs. Montrer que

$$v_3 = av_0 + bv_1 + cv_2$$

où a, b, c sont des nombres réels indépendants de v.

(3) Discuter, suivantt les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$, le rang de F_v.

Exercice 12. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que son polynôme caractéristique est égal à $(-1)^n P(X)$. La matrice A est appelée la matrice compagnon de P.

On suppose à présent que $P(X)$ admet n racines distinctes $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Montrer alors que A est diagonalisable et déterminer la matrice Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice Q est appelèe la matrice de Vandermonde.

Exercice 13. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable. Elle possède n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ que l'on suppose telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de vecteurs propres.

(1) Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il s'écrit de manière unique $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

(2) En déduire l'expression de MV puis pour tout k de $V_k = M^k V$ où V désigne le vecteur colonne associé à v.

(3) Montrer que l'on a $v_k = \lambda_1^k (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}) v_i)$. En déduire $\lim_{k \to +\infty} v_k$ et que $|\lambda_1| \approx \frac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|}$ pour k assez grand.

(4) Application. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On choisit comme vecteur $v = (1, 2, 3)$. Calculer $M^k V$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5. En déduire la valeur de la plus grande propre. Vérifier directement par le calcul des racines du polynôme caractéristique.

Exercice 14. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n ayant chacune n valeurs propres distinctes.

(1) Montrer que A et B sont diagonalisables.

(2) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que

$$AB = BA$$

est que les matrices A et B admettent les mêmes vecteurs propres.

Exercice 15. Une matrice carrée réelle d'ordre p est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des termes de chaque ligne vaut 1

(1) Ecrire un exemple de matrice stochastique d'ordre 3.

(2) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a, b \leq 1$. Montrer que A est stochastique ?

(3) Calculer son polynôme caractéristique.

(4) Quelle est sa plus grande valeur propre ?

(5) A est-elle diagonalisable ?