Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES - Chapitre 12

Sous-espaces invariants

Exercice 1. Trouver tous les sous-espaces invariants de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

considérée comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Déterminer les sous-espaces invariants de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ puis de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 3.

Supposons $\dim E = n$. Montrer que $T : E \to E$ a une représentation matricielle triangulaire si et seulement si il existe des sous-espaces invariants par T :

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = E$$

pour lesquels $\dim F_k = k,\ k = 1, \cdots, n$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice relative à la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f.

Exercice 5. Trouver les sous-espaces caractéristiques de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et présenter $\mathbb{R}^4$ comme une somme directe de sous-espaces invariants de M.

Exercice 6 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(2) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.

(3) Trouver une matrice triangulaire semblable à A.

Exercice 7. Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme $p(X) = X^2 - 4X - 5$ est un polynôme annulateur de A

Exercice 8. Trouver le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et vérifier que ce polynôme est annulateur de A.

Exercice 9. Soit V l'espace vectoriel des fonctions qui admettent $\{\sin x, \cos x\}$ comme base et soit D l'opérateur de dérivation de V. Montrer que le polynôme

$$p(X) = X^2 + 1$$

est un annulateur de D.