UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES - Chapitre 11

Trigonalisation des endomorphismes

Exercice 1

(1) Trigonaliser (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

(2) Montrer que la matrice M_2 est semblable à la matrice triangulaire T où

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

(2) La matrice est-elle diagonalisable ?

(3) La matrice est-elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.

Exercice .3

(1) Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) En déduire A^p pour tout $p > 0$.

Exercice 4. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice triangulaire T où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.Extrait sujet CAPES Maths 2014

Notations et définitions. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l ?ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$). La matrice identité de taille n est notée I_n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L ?ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$. On dit que A est d ?ordre fini s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$. Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé ordre de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

(1) Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
  - (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.(On pourra prendre $P = C_M(X)$)
  - (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu ?il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
  - (a) Démontrer que B est inversible.
  - (b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
  - (c) Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l ?unité.
  - (d) Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(3) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \geq i \geq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l ?unité pour un certain entier n_i. Pour tout entier i tel que $1 \geq i \geq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
  - (a) Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \cdots, k_n$.
  - (b) Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \cdots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

(1) Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$.

(2) On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

(a) Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On pose $B = P{-}1AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.

(c) Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$B^k = \left(\begin{array}{ccc} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

(d) En déduire que $A = I_3$.

(3) Enoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

(4) On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

(a) 4.1 Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

(b) On pose $C = Q^{-1}AQ$. Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

(c) Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

(d) En déduire que $c = 0$.

(e) En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(5) Enoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.