FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 2 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 12

Sous espaces invariants d'un endomorphisme

Table des matières

1. Sous-espaces invariants

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ un endomorphisme de E.

1.1. Définition d'un sous-espace invariant.

Définition 1. *Un sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace invariant de f si $f(F) \subset F$, autrement dit si*

$$\forall v \in F, \quad f(v) \in F.$$

Exemples.

(1) L'espace E lui même est un sous-espace invaraint de f. De même, l'espace nul $\{0\}$ est un sous-espace invariant car $f(0) = 0$. On dira qu'un sous-espace invariant de f n'est pas trivial s'il est distinct de E et de $\{0\}$.

(2) Le noyau $\ker(f)$ est un sous-espace invariant de f. En effet, si $v \in \ker(f)$, alors $f(v) = 0$ et donc $f(v) \in \ker(f)$.

(3) De même $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace invariant de f. En effet, si $v \in \mathrm{Im}(f)$, alors $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace invariant.de f.

(4) Certains i-endomorphismes n'admettent aucun sous-espace invariants non triviaux. Prenons parexemple dans le plan $\mathbb{R}^2$ une rotation vectorielle. Aucun sous-espace autre que $\mathbb{R}^2$ et $\{0\}$ n'est invariant.

1.2. Sous-espaces propres.

Soit f un endomorphisme de E. Supposons que f admette une valeur propre λ. Rappelons que cette hypothèse est toujours vérifiée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Supposons également que f n'est pas l'homothétie λId. Le sous-espace propre associé à λ :

$$E_\lambda = \{v \in E \ : \ f(v) = \lambda v\}$$

n'est donc pas trivial.

Proposition 1. *Les sous-espaces propres de f sont des sous-espaces invariants.*

Notons que si f est diagonalisable, alors, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f, on a la décomposition en somme directe

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

La réciproque est aussi vraie : si E s'écrit comme la somme directe des sous-espaces propres, alors f est diagonalisable.

1.3. Trigonalisation et sous-espaces invariants.

Soit f un endomorphisme trigonalisable de E. Il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de E par rapport à laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,} \end{pmatrix}$$

Soit, pour $i = 1, \cdots, n$, F_i le sous-espace vectoriel de E ayant pour base $\mathcal{B}_i = \{v_1, \cdots, v_i\}$. Chacun des sous-espaces F_i est un sous-espace invariant de f. En effet, si $v \in F_i$, alors $v = x_1v_1 + \cdots x_iv_i$ et

$$f(v_i) = x_1f(v_1) + \cdots x_if(v_i) = x_1a_{1,1}v_1 + \cdots + x_i(a_{1,i}v_1 + \cdots + a_{i,i}v_i)$$

et donc $f(v) \in F_i$. Ainsi, si f est trigonalisable, il existe une suite de sous-espaces invariants pour f vérifiant

$$\begin{cases} E = F_n \supset F_{n-1} \supset \cdots \supset F_2 \supset F_1 \\ \dim F_i = i. \end{cases}$$

Une telle suite de sous-espaces invariants est appelée un drapeau de f.

1.4. **Sous-espaces invariants et réduction d'un endomorphisme.** Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu le rôle que jouaient les sous-espaces invariants d'un endomorphisme f de E que sont les espaces propres et les drapeaux, dans la réduction de f : la diagonalisation dans le premier cas et la trigonalisation dans le deuxième.

Dans un cas plus général, si F est un sous-espace invariant de l'endomorphisme f, nous pouvons considérer une base $\mathcal{B}_F = \{v_1, \cdot, v_p\}$ de F et la compléter en une base de E : $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_n\}$. On appellera une telle base de E, une base adaptée à F. Comme $f(F) \subset F$, on en déduit

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ji,j}v_i$$

pour tout $j = 1, \cdots, p$. Ainsi la matrice de f dans cette base adaptée aura la structure suivante :

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

qui correspond donc à une première réduction.

Supposons à présent que E admet la décomposition

$$E = F_1 \oplus F_2$$

où F_1 et F_2 sont deux sous-espaces invariants de f supplémentaires. Considérons une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition, c'est à dire $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_p, w_{p+1}, \cdots, w_n\}$ où $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \cdots, v_p\}$ est une base de F_1 et $\mathcal{B}_2 = \{w_{p+1}, \cdots, w_n\}$ une base de F_2. En reprenant ce que nous venons de dire ci-dessus, on déduit que la matrice de f relative à cette base $\mathcal{B}$ a la structure suivante

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

avec $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Remarque. Une telle matrice est appelée diagonale par blocs. La matrice X est la matrice de la restriction de f à F_1 relative à $\mathcal{B}_1$ et Z la matrice de la restriction de f à F_2 relative à la base $\mathcal{B}_2$. On fera tout de même attention au calcul des déterminants. Si on a bien

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \det X \cdot \det Z$$

par contre en général

$$\det \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \neq \det X \cdot \det Z$$

dès que $Y \neq 0$.

Dans la section qui suit, nous allons mettre en évidence des sous-espaces invariants particuliers qui permettront de réduire l'endomorphisme f lorsque celui-ci ne sera pas diagonalisable mais simplement trigonalisable.

2. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

2.1. **Définition.**

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et soit f un endomorphisme de f admettant n valeurs propres$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de multiplicité respective $r_1, \cdots, r_p$ avec*

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n.$$

On appelle sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k le sous-espace vectoriel

$$C_f(\lambda_k) = \ker(f - \lambda_k Id)^{r_k}.$$

Rappelons que

$$(f - \lambda_k Id)^{r_k} = (f - \lambda_k Id) \circ (f - \lambda_k Id) \circ \cdots \circ (f - \lambda_k Id)$$

la composition étant faite r_k fois.

Åï **Proposition 2.** *Le sous-espace caractéristique $C_f(\lambda_k)$ de f associé à la valeur propre λ_k est un sous-espace invariant de f. De plus il contient le sous-espace propre E_{λ_k} de f associée à la valeur propre λ_k.*

Démonstration. En effet comme pour tout endomorphisme g de E on a

$$\ker(g) \subset \ker(g^2)$$

et plus généralement

$$\ker(g^p) \subset \ker(g^{p+l})$$

pour tout $l \geq 0$, on en déduit

$$C_f(\lambda_k) = ker(f - \lambda_k Id)^{r_k} \subset ker(f - \lambda_k Id)^{r_k+1}.$$

Montrons que ce sous-espace est invariant par f. Soit $v \in C_f(\lambda_k)$. Il nous faut donc montrer que $f(v) \in C_f(\lambda_k)$. Or

$$(f - \lambda_k Id)^{r_k})(f(v) - \lambda_k v) = (f - \lambda_k Id)^{r_k+1})(v) = 0$$

d'après la remarque précédente. Donc $f(v) - \lambda_k v \in C_f(\lambda_k)$. or $v \in C_f(\lambda_k)$. On en déduit

$$f() \in C_f(\lambda_k)$$

et cet espace est bien invariant par f. Montrons qu'il contient le sous-espace propre associé à λ_k. On a

$$E_{\lambda_k} = \ker(f - \lambda_k Id) \subset \ker(f - \lambda_k Id)^{r_k} = C_f(\lambda_k)$$

d'où la proposition.

2.2. **Espaces caractéristiques et diagonalisation.** Nous venons de voir que le sous-espace caractéristique de f attaché à la valeur propre λ contenait le sous-espace propre attaché à la même valeur propre. Bien entendu, si f admet n valeurs propres distinctes, alors par définition, les multiplicités étant égales à 1, on a dans ce cas

$$C_f(\lambda) = E_\lambda$$

quelle que soit la valeur propre λ. Nous pouvons généraliser cette situation.

Proposition 3. *Soit f un endomorphisme diagonalisable et soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres de multiplicité respectives $r_1, \cdots, r_p$. Alors, pour tout $k = 1, \cdots, p$:*

$$C_f(\lambda_k) = E_{\lambda_k}.$$

Autrement dit, si f est diagonalisable, les sous-espaces caractéristiques et propres coïncident.

Démonstration. Comme f est diagonalisable, alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots E_{\lambda_p}$. Considérons le sous-espaces caractéristique $C_{\lambda_i}(f)$, $1 \leq i \leq p$. Si $v \in C_{\lambda_i}(f)$, il se décompose de manière unique

$$v = v_1 + \cdots + v_p$$

avec $v_1 \in E_{\lambda_1}, \cdots v_p \in E_{\lambda_p}$. Or on vérifie aisément que

$$(f - \lambda_i)^{r_i}(v_k) = (\lambda_k - \lambda_i)^{r_i} v_k.$$

En effet

$$(f - \lambda_i)^2(v_k) = (f - \lambda_i)(f - \lambda_i)(v_k) = (f - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i)v_k = (\lambda_k - \lambda_i)^2 v_k$$

et par induction on a l'identité voulue. Ainsi

$$(f - \lambda_i)^{r_i}(v) = (f - \lambda_i)^{r_i}(v_1 + \cdots + v_p) = (\lambda_1 - \lambda_i)^{r_i} v_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_i)^{r_p} v_k = 0$$

car $v \in C_{\lambda_i}(f)$. Comme par hypothèse $\lambda_k \neq \lambda_i$ dès que $k \neq i$, alors $v_k = 0$ dès que $k \neq i$. Ainsi

$$v = v_i$$

et donc $v \in E_{\lambda_i}$ ce qui montre $C_{\lambda_i}(f) \subset E_{\lambda_i}$ et ces deux sous-espaces coïncident.

Dans ce qui suit, nous allons comparer ces deux sous-espaces dans le can non diagonalisables, mais toujours avec l'hypothèse précisant qu'il existe n valeurs propres distinctes ou confondues. Mais pour aborder ce problème nous avons besoin d'introduire la notion de polynôme annulateur de f.

3. Polynômes annulateurs

3.1. **Définition.** Soit $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une indéterminée X. Si f est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note par $p(f)$ l'endomorphisme

$$p(f) = a_0 Id + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_r f^r$$

où f^i désigne la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ appliquée i-fois. Ainsi $p(f)$ apparaît comme une combinaison linéaire des puissances de f.

Définition 3. *On dit que le polynôme $p(X)$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f si l'endomorphisme $p(f)$ est nul :*
$$p(f) = 0.$$

Par exemple, si f est une projection de E, alors par définition $f \circ f = f$. Le polynôme $p(X) = X^2 - X$ est donc annulateur de cette projection. De même si f est une symétrie de E, il vérifie $f \circ f = Id$ et le polynôme $p(X) = X^2 - 1$ est annulateur.

Notons que pour tout endomorphisme f, il existe toujours un polynôme annulateur. En effet, nous savons que la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes de E vérifie

$$\dim \mathcal{E}nd(E) = n^2$$

avec $n = \dim E$. Considérons alors la famille d'endomorphisme

$$\{Id, f, f^2, \cdots, f^{n^2}\}.$$

Cette famille contient $n^2 + 1$ éléments. Elle est donc liée et il existe une combinaison linéaire non triviale entre ces éléments. Cette combinaison s'écrit

$$a_0 Id + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots = A_{n^2} f^{n^2} = 0$$

avec les a_i non tous nuls. Ainsi le polynôme

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = A_{n^2} X^{n^2}$$

est un polynôme annulateur de f.

3.2. **Calcul pratique.** Pour vérifier qu'un polynôme est annulateur d'un endomorphisme donné f nous pouvons utiliser le calcul matriciel. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de f relative à cette base. Alors si $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$ est un polynôme annulateur de f, la matrice $p(A) = a_0 Id + a_1 A + \cdots + a_r A^r$ est nulle :

$$p(A) = 0.$$

Le calcul de $p(A)$ ne dépend pas du choix de la base choisie. En effet

Proposition 4. *Soit A une matrice carrée et $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ une matrice semblable, P étant inversible. Alors pour tout polynôme $p(X)$ on a*
$$p(A') = p(A).$$

Démonstration. Cela est une conséquence de l'identité

$$A'^k = P^{-1} A^k P$$

établie dans les chapitres précédents.

3.3. **Le théorème de Cayley-Hamilton : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.** On se place maintenant dans le cas où le corps de base est celui des complexes.

Théorème 1. *Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe E (de dimension finie). Le polynôme caractéristique $C_f(X)=\det(f-XId)$ de f est un polynôme annulateur de f :*

$$C_f(f)=0.$$

Démonstration. Rappelons que $C_f(X)=C_A(X)$ pour toute matrice A de f relative à une base donnée. Soit $f\in\mathcal{E}nd(E)$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est triangulaire. Ecrivons cette matrice sous la forme

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \times\cdots\times \\ 0 & B\end{pmatrix}$$

où B est une matrice triangulaire d'ordre $n-1$. Le polynôme caractéristique de A s'écrit donc

$$C_A(X)=\det(A_X Id)=(\lambda_1-X)\det(B-XId)=(\lambda_1-X)C_B(X).$$

Démontrons à présent le théorème par récurrence sur l'ordre n de A.

(1) Si $n=1$, alors $A=(\lambda_1)$ et $C_A(X)=(\lambda_1-X)$. Dans ce cas

$$C_A(A)=\lambda_1 Id-A=0.$$

(2) Supposons le résultat vrai pour toute matrice complexe d'ordre $n-1$. Comme B est d'ordre $n-1$, alors

$$C_B(B)=0.$$

D'après la forme de la matrice A on a

$$C_A(X)=(\lambda_1-X)C_B(X)$$

ce qui implique

$$C_A(A)=(\lambda_1 Id-A)C_B(A).$$

Calculons $C_B(A)$. Posons

$$C_B(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}.$$

Alors

$$C_B(A)=b_0Id+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1}.$$

Mais, pour tout $k\leq 1$

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \times\cdots\times \\ 0 & B^k\end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$C_B(A)=\det\begin{pmatrix}C_B(\lambda_1 & \times\cdots\times \\ 0 & C_B(B)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}C_B(\lambda_1 & \times\cdots\times \\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

On en déduit

$$C_A(A)=(\lambda_1 Id-A)C_B(A)=0.$$

Ainsi la propriété est vraie à l'ordre n

(3) Elle est donc vraie pour tout n

4. E est somme directe des sous-espaces caractéristiques : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

4.1. **La décomposition spectrale.** Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe E. Il admet donc n racines distinctes ou confondues $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_p$.

Théorème 2. *Si $C_f(\lambda_i) = \ker(f - \lambda_i Id)^{r_i}$, $i = 1, \cdots, p$, sont les sous-espaces caractéristiques de f, alors on a la décomposition en somme directe*

$$E = C_f(\lambda_1) \oplus C_f(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus C_f(\lambda_p).$$

Cette décomposition de E est appelée la décomposition spectrale de E attachée à f.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f . de multiplicités respectives $r_1, \cdots, r_p$ avec $r_1 + \cdots + r_p = n$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit donc

$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_i}.$$

Soit $p_j(X)$ le polynôme

$$p_j(X) = C_f(X)(X - \lambda_j)^{-r_j} = (-1)^n \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)^{r_i}.$$

Considérons, pour tout $j = 1, \cdots, p$ les endomorphismes $p_1(f), p_2(f), \cdots, p_p(f)$. Ces endomorphismes vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(f - \lambda_j Id)^{r_j} \circ p_j(f) = C_f(f) = 0$ d'après le théorème de Cayley Hamilton. Ainsi, pour tout $v \in E$,

$$(f - \lambda_j Id)^{r_j} (p_j(f)(v) = 0$$

et donc

$$\mathrm{Im}(p_j(f)) \subset \ker(f - \lambda_j Id)^{r_j}.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$f_i = p_i(f), \quad F_i = \mathrm{Im}(p_i(f)), \quad i = 1, \cdots, p.$$

On a donc

$$F_i \subset C_{\lambda_i}(f).$$

(2) Par constructions, les polynômes $p_1(X), p_2(X), \cdots, p_p(X)$ n'ont aucune racine en commun et n'ont donc aucun facteur en commun. Dans la théorie des polynômes à une indéterminée (voir cours Algèbre et Arithmétique), on dit que ces polynômes sont premiers entre eux. Ils vérifient donc la propriété de Bézout (on peut éventuellement admettre ici cette identité) :

"Il existe des polynômes $Q_1(X), \cdots, Q_p(X)$ tels que"

$$p_1(X)Q_1(X) + p_2(X)Q_2(X) + \cdots + p_p(X)Q_p(X) = 1.$$

On en déduit

$$p_1(f) \circ Q_1(f) + p_2(f) \circ Q_2(f) + \cdots + p_p(f) \circ Q_p(f) = Id$$

soit, pour tout $v \in E$:

$$v = f_1(Q_1(f)(v)) + f_2(Q_2(f)(v)) + \cdots + f_p(Q_p(f)(v)).$$

or $f_i(Q_i(f)(v)) \in \Im(f_i) = F_I$. Ainsi

$$E = F_1 + F_2 + \cdots + F_p.$$

(3) Montrons que l'on a

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p.$$

Il faut donc vérifier que

$$F_i \bigcap (\sum_{j \neq i} F_j) = 0.$$

Soit $v \in F_i \bigcap (\sum_{j \neq i} F_j)$. Alors

$$v \in F_i = \mathrm{Im} f_i \subset \ker(f - \lambda_i Id)^{r_i}$$

ce qui implique

$$(f - \lambda_j Id)^{r_i}(v) = 0$$

De même

$$p_i(f)(v) = -(1)^n \prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)^{r_j}(v) = 0$$

car $v \in \sum_{j \neq i} F_j$ et chaque F_j est un sous-espace de $C_{\lambda_j}(f)$. Mais les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ et $\prod_{j \neq i}(X - \lambda_j)^{r_j}$ n'ont pas de facteurs communs et sont premiers entre eux. Toujours d'après l'identité de Bézout, il existe deux polynômes $u(X)$ et $v(X)$ tels que

$$u(X)(X - \lambda_i)^{r_i} + v(X) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{r_j} = 1$$

ce qui donne

$$u(f) \circ (f - \lambda_i Id)^{r_i} + v(f) \circ \prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)^{r_j} = Id.$$

Appliquons ceci au vecteur v, on a

$$u(f)((X - \lambda_i Id)^{r_i}(v)) + v(f)(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j)^{r_j}(v)) = v.$$

Mais $(X - \lambda_i Id)^{r_i}(v) = 0$ et $(\prod_{j \neq i}(f - \lambda_j)^{r_j})(v) = 0$ d'où

$$v = 0$$

et donc $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

(4) Montrons que

$$F_I = C_{\lambda_i}(f).$$

Nous avons déjà vu que $F_i \subset C_{\lambda_i}(f)$. Soit $v \in C_{\lambda_i}(f)$. Comme $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$, on a

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in F_i, \quad v_2 \in \bigoplus_{j \neq i} F_j.$$

Reprenons l'identité de Bézout précédente :

$$u(X)(X - \lambda_i)^{r_i} + v(X) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{r_j} = 1$$

On en déduit

$$u(f)((f - \lambda_i Id)^{r_i}(v_2) + v(f)(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j Id)^{r_j}(v_2) = v_2$$

ce qui implique $v_2 = 0$ d'où le résultat.

Corollaire 1. *Pour chaque $i = 1, \cdots, p$ on a*

$$\dim C_{\lambda_i}(f) = r_i.$$

Démonstration. Comme chaque $C_{\lambda_i}(f)$ est invariant par f, la restriction $\widetilde{f_i}$ de f à $C_{\lambda_i}(f)$ est un endomorphisme de cet espace. Comme par hypothèse le corps de base est $\mathbb{C}$, cet endomorphisme $\widetilde{f_i}$ est trigonalisable. Il existe une base de $C_{\lambda_i}(f)$ par rapport à laquelle la matrice est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \star & \star & \star \\ 0 & \lambda_i & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

et cette matrice est d'ordre $s_i = \dim C_{\lambda_i}(f)$. On a donc

$$s_i = \dim C_{\lambda_i}(f) \leq r_i.$$

Mais

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$$

mais aussi

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_p = n.$$

Ainsi

$$s_i = \dim C_{\lambda_i}(f) = r_i$$

pour $i = 1, \cdots, p$.

4.2. **Matrice de f relative à une base adaptée à la décomposition spectrale.** Considérons une base adaptée à la décomposition spectrale

$$E = C_{\lambda_1}(f) \oplus C_{\lambda_2}(f) \oplus \cdots \oplus C_{\lambda_p}(f).$$

La matrice de f relative à une telle base à la forme suivante

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_p \end{pmatrix}$$

où $X_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{C})$. De plus, d'après le principe de trigonalisation, on peut supposer que les matrices X_i sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & x & x & \cdots & x \\ 0 & \lambda_i & x & \cdots & x \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

On dira dans ce cas que la matrice est une matrice de Jordan.