FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2 Mathématiques.

Mathématiques: ALGEBRE LINEAIRE II

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 9

Diagonalisation des endomorphismes

Contents

1. Matrices diagonales et diagonalisables

On notera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices réelles (respectivement complexes) carrées d'ordre n. Pour ne pas différencier (lorsque cela ne sera pas nécessaire) le cas réel du cas complexe, on notera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cet ensemble où $\mathbb{K}$ représente l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Définition.**

Définition 1. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si elle est de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$.

Ainsi, tous les éléments en dehors de la diagonale principale $\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ sont nuls. Les éléments de la diagonale principale peuvent être nuls ou non. Par exemple, la matrice nulle est diagonale.

Soient

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

(1) la somme $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi diagonale,

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi diagonale. On en déduit, en particulier, que l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On notera par $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ce sous-espace vectoriel.

(3) le produit $M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi une matrice diagonale,

1.2. **Matrices diagonalisables.**

Définition 2. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Ceci est équivalent à dire qu'il existe une matrice inversible $P \in GL(n, \mathbb{K})$ telle que la matrice*

$$M' = P^{-1}MP$$

soit diagonale.

Rappelons que $GL(n, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles. Cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car la somme de deux matrices inversibles n'est pas nécessairement inversible. Par contre, $GL(n, \mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication, le produit de deux matrices inversibles étant inversible.

Remarque. Contrairement aux matrices diagonales, il n'est pas du tout aisé de reconnaître si une matrice carrée est diagonalisable ou pas. La définition ci-dessus ne nous aide guère pour cela (voir exercice 2). On va donc mettre en évidence quelques propriétés de ces matrices pour caractériser ces matrices.

2. Valeurs propres, polynôme caractéristique d'une matrice carrée

2.1. **Valeurs propres d'une matrice carrée.**

Définition 3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de M s'il existe un vecteur colonne $V \in \mathbb{K}^n$* **NON NUL***, tel que*

$$M \cdot V = \lambda V.$$

Si V est le vecteur colonne

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et si M est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors l'équation

$$M \cdot V = \lambda V$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

C'est donc un système linéaire dont les inconnues sont λ et $x_1, \cdots, x_n$ mais les x_i sont non tous nuls. Ceci en complique la résolution. On va donc caractériser directement les valeurs propres de M pour éviter ce calcul. Soit λ une valeur propre de M. Il existe donc, d'après la définition, un vecteur colonne V non nul tel que

$$M \cdot V = \lambda v.$$

On en déduit

$$M \cdot V - \lambda V = 0$$

soit

$$(M - \lambda I_n) \cdot V = 0$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme V est non nul, on en déduit que le noyau de la matrice $M - \lambda I_n$ est non nul et donc que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Ceci se traduit par

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Inversement, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det(M - \lambda I_n) = 0$. Ainsi $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Son noyau n'est donc pas réduit à $\{0\}$. Il existe donc un vecteur colonne V non nul tel que $(M - \lambda I_n) \cdot V = 0$ et donc λ est une valeur propre de M.

Théorème 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors un scalaire λ est une valeur propre de M si et seulement si*

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Exemples.

(1) Soit I_n la matrice identité. Ses valeurs propres sont toutes égales à 1. En effet

$$\det(I_n - \lambda I_n) = 0$$

est équivalent à

$$\det((1 - \lambda) I_n) = (1 - \lambda)^n = 0.$$

(2) Les valeurs propres de la matrice nulle sont toutes nulles. Notons qu'il existe des matrices non nulles dont toutes les valeurs propres sont nulles. Par exemple, soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2$$

et donc les valeurs propres de la matrice M, qui est non nulle, sont égales à 0.

(3) Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale. Ses valeurs propres sont les éléments $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ de la diagonale.

2.2. **Polynôme caractéristique.**

La recherche des valeurs propres de la matrice M se résume donc à résoudre l'équation

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Lorsque l'on développe ce déterminant, on obtient une équation polynomiale de degré n, si n est l'ordre de la matrice M.

Définition 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme à une indéterminée X de degré n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ donné par*

$$C_M(X) = \det(M - XI_n).$$

Exemple. Soit M la matrice d'ordre 2:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C_M(X) = \det(M - XI_2) = (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a + d)X + (ad - bc).$$

Proposition 1. *Les valeurs propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique $C_M(X)$. Inversement, les racines de $C_M(X)$ sont les valeurs propres de M.*

Comme toute équation polynomiale à coefficients complexes de degré n a toujours n racines, on en déduit:

Proposition 2.
(1) *Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients complexes admet exactement n valeurs propres (distinctes ou confondues).*
(2) *Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels admet au plus n valeurs propres (distinctes ou confondues).*

Notons qu'une matrice carrée réelle peut n'avoir aucune valeur propre. Considérons par exemple la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C_M(X) = \det(M - XI_2) = X^2 + 1.$$

L'équation $X^2+1=0$ n'a aucune racine réelle. Ainsi la matrice rélle M n'a aucune valeur propre. Notons que si on considère M comme une matrice complexe, alors

$$X^2+1=0$$

admet deux racines complexes, à savoir i et $-i$. Ainsi la matrice complexe M d'ordre 2 admet deux valeurs propres.

Le résultat suivant va être fondamental pour la suite.

Théorème 2. *Soient M et M' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors elles ont le même polynôme caractéristique:*

$$C_M(X) = C_{M'}(X).$$

En particulier, elles ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une matrice inversible P telle que $M' = P^{-1}MP$. On peut écrire

$$M' - XI_n = P^{-1}MP - XI_n = P^{-1}MP - XP^{-1}I_nP = P^{-1}(M - XI_n)P.$$

Comme on a en général $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, on en déduit:

$$C_{M'}(X) = \det(M' - XI_n) = \det(P^{-1}(M - XI_n)P) = \det(P^{-1})\det(M - XI_n)\det(P) = C_M(X)$$

car $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$.

3. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.

3.1. Valeurs propres d'un endomorphisme.

Définition 5. *On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in E$* **NON NUL**, *tel que*

$$f(v) = \lambda v.$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdot, e_n\}$ une base de E et soit M la matrice de f relative à cette base. Rappelons que les colonnes de M sont les composantes dans $\mathcal{B}$ des images $f(e_1), \cdots, f(e_n)$. Du point de vue matriciel, l'identité $f(v) = \lambda v$ s'écrit

$$M \cdot V = \lambda V$$

où V est le vecteur colonne dont les composantes sont celles de v relatives à la base $\mathcal{B}$. On en déduit que λ est aussi une valeur propre de M.

Proposition 3. *Soit f un endomorphisme de E et soit M la matrice de f relative à une base donnée $\mathcal{B}$ de E. Alors les valeurs propres de f coïncident avec les valeurs propres de M.*

Ceci a bien un sens, car d'après le Théorème 2, les valeurs propres de n'importe quelle matrice de f associée à une base quelconque de E sont les mêmes. On peut même préciser:

Définition 6. *On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ donné par*

$$C_f(X) = C_M(X)$$

où M est la matrice de f relative à une base $\mathcal{B}$ de E donnée.

Conséquence: calcul des valeurs propres de f. Etant donné un endomorphisme de E, pour calculer ses valeurs propres, on se donne une base $\mathcal{B}$ de E, on calcule la matrice M de f relative à cette base et on résoud (comme on peut) l'équation polynomiale

$$C_M(X) = 0.$$

3.2. **Espace propre associé à une valeur propre.**

Définition 7. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. On appelle vecteur propre de f associé à λ tout vecteur de E qui vérifie*

$$f(v) = \lambda v.$$

Notons que le vecteur nul est toujours un vecteur propre de λ. Mais, d'après la définition d'une valeur propre, il existe toujours un vecteur propre non nul associé à λ..

Proposition 4. *Soit λ une valeur propre de f. L'ensemble des vecteurs propres de f associé à cette valeur propre est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle l'espace propre associé à la valeur propre λ et sera noté E_λ.*

Démonstration. Nous avons vu que le vecteur nul était un vecteur propre associé à λ. Donc l'ensemble des vecteurs propres est non vide. Soient v et v' deux vecteurs propres:

$$f(v) = \lambda v, \quad f(v') = \lambda v'.$$

Alors

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v + v').$$

Ainsi $v + v'$ est aussi vecteur propre associé à λ. Soit $a \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors

$$f(av) = af(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

et av est aussi vecteur propre. On en déduit que l'ensemble des vecteurs propres de f associé à λ est un sous-espace vectoriel de E.

En résumé, si λ est une valeur propre de l'endomorphisme f de E, le sous-espace propre E_λ associé à cette valeur propre est défini par

$$E_\lambda = \{v \in E \ : \ f(v) = \lambda v.\}$$

et on a toujours

$$\dim E_\lambda \geq 1$$

car cet espace contient toujours un vecteur non nul.

3.3. Détermination des espaces propres.

Théorème 3. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. Alors l'espace propre E_λ associé coïncide avec le noyau*
$$\ker(f - \lambda I_E)$$
de l'endomorphimse $f - \lambda I_E$ où I_E désigne l'endomorphisme identité de E.

Conséquence: détermination pratique de E_λ. Donnons nous une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E. Considérons la matrice M de f relative à cette base. Soit $v = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur de E. C'est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont solutions du système linéaire

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Comme λ est une valeur propre, ce système a au moins une solution non nulle.

Remarquons que la restriction de f à l'espace propre de f associé à λ est un endomorphisme de cet espace dont la matrice dans n'importe quelle base de E_λ s'écrit
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_p$$
où p désigne la dimension de E_λ. Cette dimension se détermine lors de la rśolution du système linéaire (1). Toutefois nous avons quelques informations sur cette dimension. Nous avons vu qu'elle est toujours supérieure ou égale à 1. Le résultat suivant donne une majoration de cette dimension:

Proposition 5. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. Soit k la multiplicité de λ comme racine du polynôme carsctéristique $C_f(X)$. Alors*
$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k.$$

Démonstration. Par hypothèse, on a
$$C_f(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$$
où $Q(X)$ est un polynôme de degré $(n - k)$ tel que
$$Q(\lambda) \neq 0.$$
Supposons
$$\dim E_\lambda = k_1 > k.$$
Soit $\{v_1, \cdots, v_{k_1}\}$ une base de E_λ et complétons la en une base
$$\{v_1, \cdots, v_{k_1}, e_{k_1+1}, \cdots, e_n\}$$

de E. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

où la notation $*$ signifie que l'on ne sait rien sur le coefficient sous-jacent. On en déduit:

$$\det(M - XI_n) = (\lambda - X)^{k_1} R(X)$$

où $R(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ainsi λ est une racine d'ordre supérieure ou égale à k_1 ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire 1. *Soit λ une valeur propre simple de l'endomorphisme f, c'est-à-dire racine d'ordre 1 du polynôme caractéristique $C_f(X)$. Alors*

$$\dim E_\lambda = 1.$$

4. Critère de diagonalisation

4.1. **Une propriété des sous-espaces propres d'un endomorphisme.**

Proposition 6. *Soit f un endomorphisme de E et soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Alors*

$$E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

Démonstration. En effet soit $v \in E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2}$. Il vérifie

$$f(v) = \lambda_1 v \quad \text{et} \quad f(v) = \lambda_2 v.$$

Ainsi

$$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v.$$

Comme par hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $v = 0$ et donc

$$E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

On a même

Théorème 4. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f. Alors*

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

(i.e les espaces E_{λ_i} sont en somme directe) est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Rappelons que dire que les sous-espaces E_{λ_i}, $i = 1, \cdots, k$ sont en somme directe signifie que tout vecteur non nul de E_{λ_i} ne peut s'écrire comme une somme de vecteurs appartenant aux autres E_{λ_j}, $j \neq i$. Nous allons montrer ce corollaire en faisant une récurrence sur le nombre de sous-espaces propres utilisés. Si $p = 2$, on considère deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. D'après la proposition précédente, $E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{0\}$ et donc la somme de ces deux sous-espaces est directe: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ est un sous-espace de E. Soit p tel que $2 < p \leq k-1$. Supposons que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}$ soit directe: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est un sous-espace de E. Considérons la somme

$$(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) + E_{\lambda_{p+1}}.$$

Soit $v \in (E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) \bigcap E_{\lambda_{p+1}}$. Il vérifie

$$f(v) = \lambda_{p+1} v$$

et

$$v = v_1 + v_2 + \cdots v_p, \quad v_i \in E_{\lambda_i}.$$

Donc

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

et

$$f(v) = \lambda_{p+1}(v_1 + v_2 + \cdots v_p).$$

On en déduit

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p = 0.$$

Comme la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est directe, le vecteur nul n'a que des composantes nulles et donc $\lambda_i - \lambda_{p+1} = 0$ ce qui est contraire à l'hypoyhèse.

4.2. **Endomorphismes diagonalisables.** Soit f un endomorphisme diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ telle que la matrice M de f relative à cette base soit une matrice diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$. Ceci est équivalent à dire que les vecteurs de base vérifient

$$f(v_i) = a_{ii} v_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Ainsi v_i est un vecteur propre associé à la valeur propre a_{ii}. Le polynôme caractéristique de f s'écrit:

$$C_f(X) = (-1)^n (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn}).$$

En regroupant les valeurs propres égales, on peut l'écrire sous la forme

$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{k_1} (X - \lambda_2)^{k_2} \cdots (X - \lambda_p)^{k_p}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$. Ainsi $C_f(X)$ admet n valeurs propres distinctes ou confondues, soit

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n.$$

(Notons que cette condition est toujours réalisée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas toujours lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Nous pouvons également réordonner les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$ de manière à avoir

$$\begin{array}{l} a_{11} = \cdots = a_{k_1 k_1} = \lambda_1 \\ a_{k_1+1, k_1+1} = \cdots = a_{k_1+k_2, k_1+k_2} = \lambda_2 \\ \cdots \\ a_{k_1+k_2+k_{p-1}+1, k_1+k_2+k_{p-1}+1} = \cdots = a_{n,n} = \lambda_p. \end{array}$$

Ainsi $\{v_1, \cdots, v_{k_1}\}$ sont des vecteurs propres indépendants appartenant au sous-espace propre E_{λ_1}. On en déduit

$$\dim E_{\lambda_1} = k_1$$

et de même

$$\dim E_{\lambda_i} = k_i, \quad i = 1, \cdots, p.$$

On a donc montré, compte tenu du Corollaire 1,

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

c'est-à-dire les sous-espaces propres sont supplémentaires. La réciproque de ce résultat étant facile à établir, on a donc

Théorème 5. *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisale si et seulement si*

1. *f possède n valeurs propres distinctes ou confondues,*
2. *Si $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ est l'ensemble des valeurs propres distinctes, alors*
$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

Ceci implique donc, si k_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i:

$$\dim E_{\lambda_i} = k_i.$$

4.3. **Critère de diagonalisation.** Le théorème précédent peut s'écrire sous la façon suivante, que l'on retiendra comme un critère de diagonalisation des matrices carrées.

Théorème 6. Critère de diagonalisation des matrices carrées. *Soit M une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_(\mathbb{K})$. Alors M est diagonalisable, si et seulement si*

1. *M admet n valeurs propres distinctes ou confondues, ce qui est équivalent à dire que le polynôme caractéristique admet la factorisation*
$$C_M(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{k_1} \cdots (X - \lambda_p)^{k_p}$$
avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$ et $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$.
2. $\dim E_{\lambda_i} = k_i, \quad i = 1, \cdots, p.$

Ainsi, si ces deux conditions sont remplies, il existe une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$ s'écrive

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

les valeurs propres égales étant regroupées. Le premier bloc diagonal est d'ordre k_1, le deuxième d'ordre k_2 ainsi de suite. Sous cette forme, la matrice P est constituée dans l'ordre d'une base de E_{λ_1}, d'une base de E_{λ_2} et d'une base de E_{λ_p}, bases qu'il faudra déterminer.

5. Exemples

5.1. **Une matrice diagonalisable.** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = \det(M - XI_3) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 2 & 3 \\ 0 & -2-X & 0 \\ 1 & 2 & 1-X \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en développant, par exemple suivant la règle de Sarrus:

$$\begin{aligned} C_M(X) &= (-1-X)(-2-X)(1-X) - 3(-2-X) \\ &= (-2-X)((-1-X)(1-X) - 3) \\ &= (-2-X)(X-2)(X+2) \\ &= -(X-2)(X+2)^2. \end{aligned}$$

(il est préférable de factoriser directement, cela facilite la recherche des racines). On en déduit que les valeurs propres de M sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \quad \text{racine simple} \quad k_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2, \quad \text{racine double} \quad k_2 = 2. \end{cases}$$

Déterminons une base et la dimension de E_{λ_1}. Comme $k_1 = 1$ et que $1 \leq \dim E_{\lambda_1} \leq k_1$, on a

$$\dim E_{\lambda_1} = 1 = k_1.$$

Cherchons une base. Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in E_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - 2I_3)V = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit $x_2 = 0$ et $x_1 = x_3$. Ainsi les vecteurs de E_{λ_1} sont de la forme $v = (x_1, 0, x_1)$. Une base de cet espace est donnée par

$$\{v_1 = (1, 0, 1)\}.$$

Déterminons une base et la dimension de E_{λ_2}. Comme $k_1 = 2$ on sait seulement que $1 \leq \dim E_{\lambda_2} \leq 2$. Cherchons donc une base. Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in E_{\lambda_2}$. Alors

$$(M + 2I_3)V = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant qui se réduit à une seule équation

$$\left\{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right.$$

On en déduit $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Ainsi les vecteurs de E_{λ_2} sont de la forme

$$v = (-2x_2 - 3x_3, x_2, x_3).$$

Une base de cet espace est donnée par

$$\{v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (-3, 0, 1)\}.$$

Ainsi la matrice diagonale semblable est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

avec

$$D = P^{-1}MP$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenue en mettant en colonnes les vecteurs v_1, v_2, v_3 des bases trouvées.

5.2. **Une matrice non diagonalisable mais avec n valeurs propres.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = \det(M - XI_3) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en développant, par exemple suivant la règle de Sarrus:

$$\begin{aligned} C_M(X) &= (2-X)(1-X)(-X) - 1 + (2-X) \\ &= (1-X)((2-X)(-X) + 1 \\ &= (1-X)(X^2 - 2X + 1) \\ &= (1-X)^3. \end{aligned}$$

La matrice M admet donc $\lambda_1 = 1$ comme valeur propre triple. Ainsi, en comptant la multiplicité, on a bien trois valeurs propres. Déterminons la dimension de l'espace propre associé. Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in E_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - I_3)V = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$x_3 = x_1, \ x_2 = -x_1$$

et donc

$$E_{\lambda_1} = \{v = (x_1, -x_1, x_1), \ x_1 \in \mathbb{K}\}.$$

On a donc

$$\dim E_{\lambda_1} = 1$$

et M n'est pas diagonalisable.

5.3. **Matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.** Considérons la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = X^2 + 1.$$

Il n'a pas de racines réelles et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si on considère M comme une matrice à coefficients complexes, alors $C_M(X) = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$. Déxterminons les espaces propres associés. Soit $v = (x_1, x_2) \in E_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - iI_2)V = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$x_2 = -ix_1$$

la deuxième équation se réduisant alors à $x_1 + i(ix_1) = x_1 - x_1 = 0$. Ainsi

$$E_{\lambda_1} = \{v = (x_1, -ix_1), x_1 \in \mathbb{C}\}.$$

Il est de dimension 1 et a pour base $\{v_1 = (1, -i)\}$. Comme λ_2 est conjugué de λ_1, on aura comme base de E_{λ_2} le vecteur $\overline{v_1} = (1, i)$. La matrice M est bien diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Elle est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

6. Une classe de matrices diagonales: les matrices symétriques réelles

6.1. Matrices symétriques.

Définition 8. *Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On dit qu'elle est symétrique si elle est égale sa transposée, c'est-à-dire si :*
$$^tA = A.$$

6.2. Valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Proposition 7. *Toute matrice symétrique réelle d'ordre n admet n valeurs propres distinctes ou confondues.*

Démonstration. Soit M une matrice symétrique réelle. On peut la considérer comme une matrice à coefficients complexes. Son polynôme caractéristique $C_M(X)$ peut être considéré comme un polynôme à coefficients complexes. Il admet donc n racines complexes distinctes ou confondues. Soit λ une racine de $C_M(X)$ dans $\mathbb{C}$. C'est donc une valeur propre de M considérée comme une matrice complexe. Il existe donc un vecteur colonne complexe V on nul, tel que
$$MV = \lambda V.$$
Notons par $\overline{M}$ et $\overline{V}$ les matrices complexes dont les coefficients sont les éléments complexes conjugués de M et V. On a bien, en prenant le conjugué de l'équation ci-dessus:
$$\overline{M}\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}.$$
Comme M est une matrice réelle, alors $\overline{M} = M$ et donc
$$M\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}.$$
Calculons de deux façons le produit matriciel $^tV(M\overline{V})$. On a
$$^tV(M\overline{V}) =^t VM\overline{V} =^t V\overline{\lambda}\overline{V} = \overline{\lambda}^t V\overline{V}.$$
On a aussi
$$^tV(M\overline{V}) =^t V^tM\overline{V} =^t (MV)\overline{V} = \lambda(^tV\overline{V}).$$
Ainsi
$$\overline{\lambda}^t V\overline{V} = \lambda(^tV\overline{V}).$$
Comme V est non nul, le scalaire $^tV\overline{V}$ est aussi non nul. On en déduit:
$$\overline{\lambda} = \lambda$$
et la valeur propre λ est réelle. D'où le résultat.

6.3. **Diagonalisation des matrices symétriques réelles.**

Théorème 7. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable*

Démonstration. Ce résultat classique se démontre en général dans le cours d'algèbre bilinéaire.

EXERCICES

Exercice 1.

(1) Soit M_1 une matrice diagonale d'ordre n. Calculer M_1^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
(2) Soit M_2 une matrice diagonalisable d'ordre n. Calculer M_2^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. En utilisant la Définition 1.2, peut-on voir si une matrice carrée complexe d'ordre 2 est diagonalisable ou non?

Exercice 3. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que son polynôme caractéristique est égal à $(-1)^n P(X)$. La matrice A est appelée la matrice compagnon de P.

On suppose à présent que $P(X)$ admet n racines distinctes $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Montrer alors que A est diagonalisable et déterminer la matrice Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice Q est appelèe la matrice de Vandermonde.

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable. Elle possède n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ que l'on suppose telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de vecteurs propres.

(1) Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il s'écrit de manière unique $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.
(2) En déduire l'expression de MV puis pour tout k de $V_k = M^k V$ où V désigne le vecteur colonne associé à v.
(3) Montrer que l'on a $v_k = \lambda_1^k (\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}) v_i)$. En déduire $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} v_k$ et que $|\lambda_1| \approx \dfrac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|}$ pour k assez grand.

(4) Application. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On choisit comme vecteur $v = (1, 2, 3)$. Calculer $M^k V$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5. En déduire la valeur de la plus grande propre. Vérifier directement par le calcul des racines du polynôme caractéristique.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ -25 & 17 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable. Si oui le diagonaliser. Sinon, lire le chapitre 3.

Exercice 6. Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

avec $a + b = 1$ et $c + d = 1$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8. On considère la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Déterminer, suivant les valeurs de a, b, c les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

Exercice 9. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices rélles B telles que $B^2 = A$.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Diagonaliser f.

(2) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et soit la suite de vecteurs
$$v_0 = v, v_1 = f(v), \cdots, v_n = f(v_{n-1}), \cdots$$
Soit F_v le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs. Montrer que
$$v_3 = av_0 + bv_1 + cv_2$$
où a, b, c sont des nombres réels indépendants de v.

(3) Discuter, suivantt les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$, le rang de F_v.

Exercice 11. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n ayant chacune n valeurs propres distinctes.

(1) Montrer que A et B sont diagonalisables.

(2) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que
$$AB = BA$$
est que les matrices A et B admettent les mêmes vecteurs propres.