UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Mathématiques et Informatique

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 2

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: la géométrie vectorielle

Table des matières

1. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce chapitre nous allons nous intéresser à la géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace, c'est-à-dire à l'étude vectorielle des plans et des droites dans $\mathbb{R}^3$. Nous affinerons notre étude à l'aide d'un outil non plus linéaire mais bilinéaire en un sens que nous préciserons, le produit scalaire. Cet outil permet de faire des mesures de longueur, d'angle dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1.1. **La base canonique de $\mathbb{R}^n$.** Par définition l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}.$$

Nous identifierons naturellement $\mathbb{R}^1$ et $\mathbb{R}$. Dans le premier chapitre nous avons rappelé que $\mathbb{R}^n$ était muni d'une structure d'espace vectoriel réel, les opérations concernées étant

(1) l'addition : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

(2) la multiplication externe par un scalaire : si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha\overrightarrow{X} = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n).$$

Le vecteur nul $(0, 0, \cdots, 0)$ sera noté $\overrightarrow{0}$.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \cdots, 0),\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots, \overrightarrow{e_n} = (0, 0, \cdots, 0, 1).$$

Si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ il se décompose de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

ce qui montre que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et donc que $\mathbb{R}^n$ est bien de dimension n. Cette base "privilégiée" sera appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, les scalaires x_i sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base canonique.

1.2. **Les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.** Considérons les deux espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, elle se présente sous la forme

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_p).$$

Posons $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, p$. Chacune des applications f_i est une application linéaire $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ainsi f apparaît comme la composition des p applications linéaires :

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$$

et donc l'étude de f se ramène à l'étude des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposons donc dans un premier temps que $p = 1$, soit

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et posons $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y$. Comme f est linéaire, nous pouvons écrire

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 f(1, 0, \cdots, 0) + x_2 f(0, 1, , 0, \cdots, 0) + x_n f(0, 0, \cdots, 1)$$

soit

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Nous retrouvons là le fait que f est entièrement définie par les images des vecteurs de base, ici la base canonique. Posons

$$f(\overrightarrow{e_1}) = a_1, f(\overrightarrow{e_2}) = a_2, \cdots, f(\overrightarrow{e_n}) = a_n.$$

Alors

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Proposition 1. *Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

avec $a_i = f(\overrightarrow{e_i}) \in \mathbb{R}$.

Nous en déduisons

Corollaire 1. *Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ où les f_i sont des applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent donc sous la forme*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \cdots \\ f_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{cases}$$

Nous déduisons que la matrice de l'application linéaire f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

L'expression analytique de f s'écrit ainsi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1.3. **Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Sa dimension p est inférieure à n et rappelons que si $p = n$ alors $F = \mathbb{R}^n$. Du théorème de la base incomplète nous déduisons directement le résultat suivant :

Proposition 2. *Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n variables*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

La résolution de tels systèmes linéaires a été vue en première année. Rappelons toutefois, qu'une manière un peu longue mais algorithmique de résoudre un tel système est la méthode du pivot. A ce niveau là, il serait intéressant de concevoir un programme sur PYTHON de résolution des systèmes linéaires.

Considérons le système linéaire précédent définissant le sous-espace vectoriel F. La matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

peut être vue comme la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ écrite dans les bases canoniques. Si p est la dimension de F, alors par définition de cette matrice, comme F est le noyau de f, nous avons $p = \dim \ker f$ et le théorème noyau image implique

$$\mathrm{rg}(f) = n - p.$$

Ce rang correspond au nombre d'équations linéaires indépendantes dans le système linéaire de définition de f.

Droites et plans dans $\mathbb{R}^3$

Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ est par définition un sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. D'après la remarque ci-dessus, il est défini comme le noyau d'une application linéaire de rang 1 et donc par une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

dont au moins un des coefficients est non nul. Supposons par exemple que ce soit a_1. Nous pouvons écrire
$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$$
et le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent
$$\overrightarrow{X} = (-\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3, x_2, x_3).$$
Une base de $\mathcal{P}$ est donnée par la famille
$$\{\overrightarrow{v_1} = (-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0), \overrightarrow{v_2} = (-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1)\}.$$

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est par définition un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de dimension 1. Elle est donc définie par un système linéaire de rang 2 à trois variables :
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0 \end{cases}$$
les deux équations étant indépendantes. La résolution de ce système permet de trouver une base de $\mathcal{D}$. Pour vérifier que ces deux équations sont bien indépendantes, plusieurs approches sont à notre disposition. La plus simple est de résoudre ce système, La solution doit s'écrire qu'avec un seul paramètre. La deuxième, plus sophistiquée mais plus facile à généraliser consiste à regarder tous les déterminants d'ordre 2 de la matrice
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$
du système, à savoir
$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}, \\ \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}, \\ \det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{3,1}, \end{cases}$$
et le rang du système est égal à 2 si l'un de ces déterminants est non nul. Supposons par exemple que ce soit le premier, soit $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$. La résolution du système donne alors
$$x_1 = -\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}x_3, \; x_2 = -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}x_3$$
et tout vecteur de $\mathcal{D}$ s'écrit
$$\left(-\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, 1\right)x_3.$$
Une base de $\mathcal{D}$ est donnée par
$$\left\{\left(-\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, 1\right)\right\}.$$

Remarque. La donnée d'une base d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ permet inversement de retrouver une équation linéaire de ce plan. Il est bon de noter que cette équation n'est pas unique : si $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ est une équation définissant le plan, alors pour tout $\lambda \neq 0$,

$\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \lambda a_3x_3 = 0$ est également une équation linéaire définissant ce plan. Il en est de même pour une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. La donnée d'une base, constituée d'un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ permet de retrouver le système de rang 2 définissant cette droite. Là aussi les équations formant le système ne sont pas uniques, tout système équivalent est également un système linéaire définissant cette droite.

2. Projection sur un sous-espace

2.1. **Projection le long d'un supplémentaire.** Soit F_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Choisissons un sous-espace supplémentaire F_2 (celui ci n'est évidemment pas unique, on en choisit un). Nous avons donc

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2.$$

Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$$

avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1$ et $\overrightarrow{X_2} \in F_2$.

Définition 1. *Le vecteur $\overrightarrow{X_1} \in F_1$ est appelé le projeté du vecteur $\overrightarrow{X}$ sur le sous-espace F_1 le long du supplémentaire F_2.*

Il est clair que ce vecteur F_1 dépend du choix de F_2.

2.2. **Exemple : Projection d'un vecteur sur un plan.** Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ un plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Supposons que les vecteurs $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}\}$ forment une base de $\mathcal{P}$. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver un vecteur $\overrightarrow{U_3}$ tel que $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ayant pour base $\overrightarrow{U_3}$. Ce sous-espace vectoriel est donc de dimension 1, c'est une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Il admet une décomposition unique dans la base $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\}$:

$$\overrightarrow{X} = x_1'\overrightarrow{U_1} + x_2'\overrightarrow{U_2} + x_3'\overrightarrow{U_3}$$

et nous avons

$$\overrightarrow{X_1} = x_1'\overrightarrow{U_1} + x_2'\overrightarrow{U_2} \in \mathcal{P}, \overrightarrow{X_2} = x_3'\overrightarrow{U_3} \in \mathcal{D}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{X_1}$ est le projeté du vecteur $\overrightarrow{X}$ sur le plan $\mathcal{P}$ le long de la droite $\mathcal{D}$.

2.3. **L'application linéaire projection.** Revenons au cas général : $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$ la décomposition de $\overrightarrow{X}$ associée. Par définition $\overrightarrow{X_1}$ est de projeté de $\overrightarrow{X}$ sur F_1 le long de F_2. Considérons l'application

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

donnée par

$$p(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X_1}.$$

Cette application est bien linéaire. Elle vérifie l'identité

$$p \circ p = p.$$

En effet si $\overrightarrow{X} \in F_1$ sa décomposition s'écrit $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0}$ et dans ce cas $p(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}$. Nous avons donc

$$\mathrm{Im}(p) = F_1,\ \ker(p) = F_2.$$

Définition 2. *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, une projection est une application linéaire $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant l'identité*

$$p \circ p = p.$$

Une telle application définit donc une projection sur le sous-espace vectoriel $F_1 = \mathrm{Im}(p)$ le long du sous-espace $F_2 = Ker(p)$.

Remarque sur la matrice de l'application linéaire p

Considérons dans $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$ la projection sur F_1 le long de F_2. Soit p l'application linéaire projection associée. Nous avons

$$F_1 = \mathrm{Im}(p),\ \ F_2 = \ker(p)$$

et pour tout vecteur $\overrightarrow{X_1} \in F_1$, $p(\overrightarrow{X_1}) = \overrightarrow{X_1}$ (la restriction de p à F_1 est l'application identité. Supposons que $\dim F_1 = m$ et considérons une base de $\mathbb{R}^n$ (ce n'est certainement pas la base canonique) :

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{U_1}, \cdots, \overrightarrow{U_m}, \overrightarrow{U_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{U_n}\}$$

telle que $\{\overrightarrow{U_1}, \cdots, \overrightarrow{U_m}\}$ soit une base de F_1 et $\{\overrightarrow{U_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{U_n}\}$ est une base de F_2. La matrice de p relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons donc sur cet exemple que le choix de la base pour écrire la matrice d'une application linéaire est important : la matrice de p dans la base canonique est sûrement beaucoup plus compliquée.