UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Mathématiques et Informatiques

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

Table des matières

1. Les espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel réel ou complexe a été vue en première année. Nous faisons dans ce chapitre un bref rappel des notions essentielles et indispensables pour la suite de ce cours. Nous noterons par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Lorsque nous ne voudrons pas distinguer ces deux ensembles, nous utiliserons le symbole $\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{K}$ désignera l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.** Soit E un ensemble dont les éléments, qui seront appelés "vecteurs", seront notés par une majuscule fléchée, comme $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ ou même indexée, $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}$. Les éléments de $\mathbb{K}$, appelés "scalaires" seront notés par une minuscule latine ou grecque, x,y,α qui peuvent être indexées x_1,x_2,α_3.

Définition 1. *On dit que l'ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il possède les propriétés suivantes*

(1) Il est muni d'une première opération **interne***, appelée addition, qui associe à deux éléments quelconques $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ de E un troisième élément noté $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$, cette opération possédant les propriétés suivantes :*

- *(a) Elle est associative* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in E,\ \ (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) + \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})$,
- *(b) Elle est commutative :* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E,\ \ \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{X}$,
- *(c) Il existe un élément neutre $\overrightarrow{0} \in E$, appelé vecteur nul :* $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ \ \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$,
- *(d) Tout élément $\overrightarrow{X}$ de E possède un symétrique $(\overrightarrow{-X}) \in E$ par rapport à $\overrightarrow{0}$:*

$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{K}, \exists (\overrightarrow{-X}) \in E,\quad \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{-X}) = \overrightarrow{0}.$$

(2) Il est muni d'une deuxième opération **externe***, appelée la multiplication par un scalaire ou multiplication externe, qui à un élément $\overrightarrow{X}$ de E et un scalaire α de $\mathbb{K}$ fait correspondre un vecteur noté $\alpha\overrightarrow{X}$ de E, cette opération vérifiant les propriétés suivantes*

- *(a)* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ \alpha(\beta\overrightarrow{X}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{X}$,
- *(b)* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ (\alpha + \beta)\overrightarrow{X} = \alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{X}$,
- *(c)* $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E,\ \alpha(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = \alpha\overrightarrow{X} + \alpha\overrightarrow{Y}$,
- *(d)* $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.

Notez que nous ne parlons pas (encore) de multiplication de vecteurs. Ceci viendra plus tard. Comme conséquences directes de cette définition, on montre les propriétés suivantes :

(1) $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 0\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0},$.

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$,

(3) $\alpha\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.

(4) $\forall \overrightarrow{X} \in E, -\overrightarrow{X} = -1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{-X}$.

Toutes les propriétés présentées dans la définition ci-dessus permettent de simplifier des expressions linéaires entre vecteurs de E. Par exemple

$$3(2\overrightarrow{X} - 4\overrightarrow{Y}) + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 6\overrightarrow{X} - 12\overrightarrow{Y} + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 11\overrightarrow{X} - 11\overrightarrow{Y} = 11(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}).$$

1.2. **Exemples d'espaces vectoriels.** Les exemples ci-dessous ne sont pas démontrés. On se reportera au cours de première année et il est suggéré de refaire toutes les démonstrations.

(1) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(2) $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En effet si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x+iy \in \mathbb{C}$, alors $\alpha(x+iy) = \alpha x+i\alpha y$ et la multiplication externe est bien définie. Notons la remarque fondamentale suivante : les deux espaces vectoriels, $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, bien qu'ayant le même ensemble sous-jacent à savoir l'ensemble $\mathbb{C}$ sont totalement différents en tant qu'espaces vectoriels. On notera également que $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ car la multiplication externe n'est pas définie. En effet si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}$, alors $\alpha = a + ib$ et $\overrightarrow{X} = x$ et $\alpha\overrightarrow{X} = (a + ib)x = ax + ibx$ et ceci n'appartient pas toujours à $\mathbb{R}$. Par exemple $\alpha = i$ et $\overrightarrow{X} = 2$, alors $\alpha\overrightarrow{X} = 2i \notin \mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels. Cet espace vectoriel est assez délicat à étudier. Il est à la base de la théorie des nombres, de la théorie de Galois. Il est totalement différent, comme espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}$.

(4) Soit n un entier positif non nul et $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\}$ l'ensemble des n-uples de nombres réels. Alors $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux opérations suivantes :
   (a) $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$,
   (b) $\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

   On vérifie sans peine que toutes les propriétés de la définition sont vérifiées.

(5) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'addition est définie par
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
et la multiplication par un scalaire par
$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)).$$
L'ensemble des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour l'ensemble des fonctions dérivables.

2. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit F une partie* **non vide** *de E.*

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

(1) La somme $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$ de deux vecteurs de F est encore dans F,

(2) Le produit $\alpha\overrightarrow{X}$ de $\alpha \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ est encore dans F.

Ces deux conditions peuvent se résumer en une seule : F est un sous-espace vectoriel de E si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in F$, alors
$$\alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{Y} \in F.$$
On vérifie sans peine que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cette remarque est très utile pour montrer que ensemble donné est muni d'une structure d'espace vectoriel, il suffit de voir qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

La propriété suivante concernant des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné sera très utile dans l'étude géométrique des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Elle est laissée en exercice. Mais il est utile de la faire.

Remarque. Il n'en est rien concernant la réunion de sous-espaces. En général si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, alors la réunion $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et considérons

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\},\ F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}.$$

Soient $\overrightarrow{X} = (1, -1)$ et $\overrightarrow{Y} = (2, 2)$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont bien dans la réunion $F_1 \cup F_2$ car $\overrightarrow{X} \in F_1$ et $\overrightarrow{Y} \in F_2$. Mais

$$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = (1, -1) + (2, 2) = (3, 1)$$

et ce vecteur n'est ni dans F_1 ni dans F_2 et donc n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$. Cette réunion n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E, nous pouvons nous intéresser au plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient cette réunion et qui peut être E lui même. Nous sommes alors conduit à la définition suivante

Proposition 2. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble noté $F_1 + F_2$ et défini ainsi*

$$F_1 + F_2 = \{\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2},\ \overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant le sous-ensemble $F_1 \cup F_2$.

Démonstration. Montrons que $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E. L'ensemble $F_1 + F_2$ est un sous-ensemble de E qui est non vide puisque $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ est un élément de $F_1 + F_2$. Soient $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in F_1 + F_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z} \in F_1 + F_2$. Par définition de $F_1 + F_2$ il existe des vecteurs $\overrightarrow{X_1} \in F_1$, $\overrightarrow{X_2} \in F_2$ tels que $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$. De même, il existe $\overrightarrow{U_1} \in F_1, \overrightarrow{U_2} \in F_2$ tels que $\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z} &= \alpha_1(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) + \alpha_2(\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}) \\ &= (\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{U_1}) + (\alpha_2\overrightarrow{X_2} + \alpha_2\overrightarrow{U_2}). \end{aligned}$$

Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{U_1} \in F_1$. De même $\alpha_2\overrightarrow{X_2} + \alpha_2\overrightarrow{U_2} \in F_2$. Ainsi $\alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z}$ se présente comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Ainsi $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme il contient F_1 et F_2, il contient le sous-ensemble $F_1 \cup F_2$. Manifestement, c'est le plus petit contenant cet ensemble puisque un espace vectoriel est stable par somme donc doit contenir les éléments $\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in F_1 \cup F_2$ donc en particulier contenir les éléments du type $\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y} \in F_1$, $\overrightarrow{Z} \in F_2$.

Remarque : sous-espaces supplémentaires. Supposons de plus que les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 vérifient

$$F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Rappelons que tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent le vecteur nul de E et donc leur intersection n'est jamais vide. Sous cette nouvelle hypothèse on écrira la somme de ces deux sous-espaces $F_1 \oplus F_2$. Tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Mais cette décomposition n'est pas en général unique (quand on n'a pas d'hypothèse sur l'intersection $F_1 \cap F_2$). Toutefois, on montre aisément qu'avec l'hypothèse $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, tout vecteur de $F_1 \oplus F_2$ s'écrit de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Si de plus nous avons

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

nous dirons dans ce cas que les sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires.

3. Dépendance et indépendance linéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ un système de p vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* de ces p vecteurs tout somme de la forme

$$\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p \overrightarrow{X_p}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ Une telle somme est bien un vecteur de E.

3.1. Vecteurs linéairement dépendants, vecteurs libres.

Définition 3. *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement dépendants s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls tels que*

$$\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p \overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0}.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est liée.

Définition 4. *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement indépendants si*

$$\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p \overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0}$$

implique

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_p = 0.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est libre. Il est clair qu'une famille qui n'est pas liée est libre et qu'une famille qui n'est pas libre est liée. Des définitions ci-dessus on déduit directement les remarques suivantes :

(1) Aucun vecteur d'une famille libre ne peut être nul.

(2) Toute sous-famille d'une famille de vecteurs indépendants est aussi libre.

(3) Toute famille de vecteurs contenant une sous-famille de vecteurs dépendants est aussi liée.

3.2. **Espaces vectoriels de dimension finie.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si quel que soit l'entier positif n, on peut trouver une famille libre de n vecteurs de E, nous dirons que *E est de dimension infinie*. Des exemples sont proposés dans la fiche d'exercice. Ces espaces vectoriels seront étudiés en troisième année de Licence. Ils jouent des rôles fondamentaux en analyse fonctionnelle. Nous nous intéressons ici au cas des espaces de dimension finie, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas de dimension infinie. Ceci équivaut à la définition suivante :

Définition 5. *Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est dit de dimension finie s'il existe un entier positif k tel que toute famille de k vecteurs de E soit liée.*

Soit donc n l'ordre maximum d'un système libre de vecteurs de E. Il existe donc au moins une famille $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_n}\}$ de vecteurs linéairement indépendants et toute famille de $n+1$ de vecteurs ou plus est nécessairement liée. Ce nombre n est applelé la dimension de E et nous noterons

$$n = \dim E.$$

L'un des problèmes essentiels que nous rencontrerons est celui d'évaluer cette dimension après avoir vérifié que l'espace vectoriel était bien de dimension finie.

Définition 6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors toute famille libre de n vecteurs est appelée une base de E.*

Il est d'usage d'écrire les vecteurs d'une famille libre qui est une base ainsi :$\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$.

Théorème 1. *Etant donnée une base quelconque $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de l'espace vectoriel E de dimension n, tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E s'exprime de manière unique*

$$\overrightarrow{X} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$$

comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Démonstration. Considérons les $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$. D'après la définition de n, ces vecteurs sont linéairement dépendants. Il existe donc des scalaires non tous nuls, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, tels que

$$\alpha \overrightarrow{X} + \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}.$$

Le coefficient α de $\overrightarrow{X}$ ne peut être nul sinon nous aurions une combinaison linéaire $\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$ entre les vecteurs de la base choisie, ce qui est contraire à la définition d'une base. En divisant par α, on déduit

$$\overrightarrow{X} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_n \overrightarrow{e_n}$$

avec $\beta_i = -\alpha_i/\alpha$. Ainsi $\overrightarrow{X}$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire des vecteurs de base. Montrons que cette écriture est unique. Soit donc

$$\overrightarrow{X} = \beta'_1 \overrightarrow{e_1} + \beta'_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta'_n \overrightarrow{e_n}$$

une autre écriture de $\overrightarrow{X}$. En soustrayant ces deux expressions, nous obtenons

$$\overrightarrow{0} = (\beta_1 - \beta'_1)\overrightarrow{e_1} + (\beta_2 - \beta'_2)\overrightarrow{e_2} + \cdots + (\beta_n - \beta' n)\overrightarrow{e_n}.$$

Comme les vecteurs de la base sont linéairement indépendants, tous les coefficients de cette combinaison linéaire nulle sont tous nuls, ce qui donne

$$\beta_1 = \beta'_1, \beta_2 = \beta'_2 = \cdots = \beta_n = \beta'_n$$

est les deux écritures sont les mêmes.

Dire que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base peut également s'interpréter en disant qu'une base est une famille génératrice de E. Plus généralement

Définition 7. *Soit $\{\overrightarrow{X}_1, \cdots, \overrightarrow{X}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice si tout vecteur de E s'écrit (pas nécessairement de manière unique) comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.*

Il est clair que toute famille qui contient une famille génératrice est elle même génératrice.

Proposition 3. *Une base est donc une famille génératrice minimale.*

Démonstration. La démonstration est laissée en exercice.

Nous en déduisons que pour montrer qu'une famille de vecteurs de E forme une base de cet espace, nous devons montrer

(1) que cette famille est libre maximale,
(2) que cette famille est génératrice minimale,
(3) ou bien que tout vecteur s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

3.3. **Calcul analytique.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Donnons nous une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur de E. Il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Les scalaires $x_1, x_2, \cdots, x_n$ s'appellent les composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$.

Considérons une autre base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e}'_1, \cdots, \overrightarrow{e}'_n\}$ de E. Le même vecteur $\overrightarrow{X}$ se décompose de manière unique dans cette nouvelle base :

$$\overrightarrow{X} = x'_1\overrightarrow{e'_1} + x'_2\overrightarrow{e'_2} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e'_n}.$$

Quelles sont les relations entre les composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ du vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$ et les composantes $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ de ce vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}'$? Pour cela considérons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e'_i}$ de la nouvelle base :

$$\overrightarrow{e'_i} = a_{1,i}\overrightarrow{e_1} + a_{2,i}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,i}\overrightarrow{e_n} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\overrightarrow{e_j}.$$

En remplaçant les vecteurs $\overrightarrow{e'_i}$ dans l'expression de $\overrightarrow{X}$ relative à cette base, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X} &= x'_1 \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,1}\overrightarrow{e}_j + x'_2 \sum_{j=1}^{n} a_{j,2}\overrightarrow{e}_j + \cdots + x'_n \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}\overrightarrow{e}_j \\ &= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} x'_k a_{1,k})\overrightarrow{e_1} + (\sum_{k=1}^{n} x'_k a_{2,k})\overrightarrow{e_2} + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} x'_k a_{n,k})\overrightarrow{e_n}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n$ et cette écriture est unique. On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \sum_{k=1}^{n} x'_k a_{1,k} \\ x_2 = \sum_{k=1}^{n} x'_k a_{2,k} \\ \cdots \\ x_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k a_{n,k} \end{array}\right.$$

Pour les habitués du calcul matriciel, nous pouvons synthétiser ces dernières relations en considérant la matrice P de changement de base :

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible, son déterminant est non nul, car c'est une matrice de changement de base. Nous obtenons la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

3.4. **Le théorème de la base incomplète.** Nous rappelons dans ce paragraphe un théorème fort pratique pour faire du calcul analytique dans un sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une famille de vecteurs de E linéairement indépendants. Si $n = \dim E$, alors $p \leq n$ car n correspond au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans E. Si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E et nous avons plus rien à faire. Supposons $p < n$. Il existe nécessairement un vecteur $\overrightarrow{X}$ non nul tel que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{X}\}$ soit libre, sinon $\mathcal{F}$ serait une famille maximale de vecteurs indépendants ce qui contredirait l'hypothèse $p < n$. Ecrivons $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{e_{p+1}}$ et considérons la famille $\mathcal{F}_1 = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}\}$. En répétant à $\mathcal{F}_1$ le même raisonnement, on ne sera arrêté qu'après avoir adjoint à la famille $\mathcal{F}$ des vecteurs au nombre de $n - p$. Nous avons ainsi démontré :

Théorème 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$, avec $p < n$, une famille de vecteurs de E linéairement indépendants. Il existe alors des vecteurs $\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ tels que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ soit une base de E.*

Une conséquence intéressante est la suivante : soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Soit donnée une base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de ce sous-espace. Nous pouvons toujours compléter cette base en une base $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Ceci s'avèrera fort utile lorsque nous voudrons faire du calcul analytique dans E en mettant en évidence le sous-espace F. Dans les chapitres suivants, nous verrons de nombreuses applications.

4. Applications linéaires

Nous allons revenir, dans ce paragraphe, sur les applications linéaires entre deux espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs du premier espace en une combinaison linéaire de vecteurs du deuxième espace.

4.1. **Définition.**

Définition 8. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit*

$$f : E \to F$$

une application de E dans F. Elle est appelée linéaire si elle vérifie

(1) $\forall \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \in E, \quad f(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) = f(\overrightarrow{X_1}) + f(\overrightarrow{X_2}),$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \overrightarrow{X}) = \alpha f(\overrightarrow{X}), \ \forall \overrightarrow{X} \in E.$

Nous en déduisons immédiatement que si $\alpha_1\overrightarrow{X_1}+\alpha_2\overrightarrow{X_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{X_p}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de E, alors

$$f(\alpha_1\overrightarrow{X_1}+\alpha_2\overrightarrow{X_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{X_p})=\alpha_1 f(\overrightarrow{X_1})+\alpha_2 f(\overrightarrow{X_2})+\cdots+\alpha_p f(\overrightarrow{X_p}).$$

4.2. **Noyau et Image d'une application linéaire.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. De la définition, nous déduisons

$$f(\overrightarrow{0_E})=\overrightarrow{0_F}$$

où $\overrightarrow{0_E}$ désigne le vecteur nul de E et $\overrightarrow{0_F}$ celui de F. Ainsi le sous-ensemble de E des vecteurs qui ont pour image par f le vecteur nul contient au moins $\overrightarrow{0}_E$. On appelle Noyau de f ce sous-ensemble de E :

$$\ker(f)=\{\overrightarrow{X}\in E,\ f(\overrightarrow{X})=\overrightarrow{0_F}\}.$$

Proposition 4. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. La démonstration est simple mais il est conseillé de la faire en tant qu'exercice.

Le noyau d'une application linéaire contient des informations sur cette application. Rappelons dans un premier temps la notion d'injectivité. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *injective* si deux éléments distincts x_1 et x_2 de A ont pour image par f deux éléments distincts de B. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ est injective si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in A$, l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Proposition 5. *L'application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement son noyau* $\ker(f)$ *est réduit à* $\{\overrightarrow{0_E}\}$.

Démonstration. Supposons que f soit injective. Nous devons déterminer son noyau. Soit $\overrightarrow{X}\in\ker(f)$. Il vérifie donc $f(\overrightarrow{X})=\overrightarrow{0_F}$. Mais comme f est linéaire, cette application vérifie aussi $f(\overrightarrow{0_E})=\overrightarrow{0_F}$. Ainsi $f(\overrightarrow{X})=f(\overrightarrow{0_E})$. L'injectivité de f implique donc $\overrightarrow{X}=\overrightarrow{0_E}$ et donc le noyau de f ne contient que le vecteur nul de E. Démontrons à présent la réciproque. Soit $f : E \to F$ une application linéaire vérifiant $\ker(f)=\{\overrightarrow{0_E}\}$. Considérons deux éléments $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ de E. Supposons que $f(\overrightarrow{X_1})=f(\overrightarrow{X_2})$. La linéairité de f implique

$$f(\overrightarrow{X_1})-f(\overrightarrow{X_2})=f(\overrightarrow{X_1}-\overrightarrow{X_2})$$

et donc $f(\overrightarrow{X_1}-\overrightarrow{X_2})=\overrightarrow{0_F}$. Ainsi $\overrightarrow{X_1}-\overrightarrow{X_2}$ est un vecteur du noyau de f qui par hypothèse ne contient que le vecteur nul. D'où $\overrightarrow{X_1}-\overrightarrow{X_2}=\overrightarrow{0_E}$ ce qui donne

$$\overrightarrow{X_1}=\overrightarrow{X_2}$$

et l'injectivité de f s'en déduit.

On appelle Image de l'application linéaire $f : E \to F$ le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$ constitué de tous les éléments images par f des éléments de E :

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(\overrightarrow{X}),\ \forall\overrightarrow{X}\in E\}.$$

Proposition 6. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. La démonstration est ici aussi simple mais il est toujours conseillé de la faire en tant qu'exercice.

L'information sur f contenue dans ce sous-espace de F concerne la surjectivité. Rappelons la définition générale. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *surjective* si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ *est surjective si pour tout* $y \in B$ *il existe* $x \in A$ *tel que* $f(x) = y$.

Proposition 7. *L'application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Ici il n'y a pas grand chose a démontrer car c'est une reformulation même de la définition de la surjectivité.

Remarque : Comment déterminer $\mathrm{Im}(f)$ **lorsque** E **est de dimension finie.** Supposons que E soit de dimension finie n. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E se décompose sur cette base $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. Considérons le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de F. Soit $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $\overrightarrow{X} \in E$ tel que $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X}) = f(x_1\overrightarrow{e}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Ceci nous montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$. On en déduit que si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est une base de E, alors la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une famille génératrice de F. Mais notons que cette famille n'est pas en général libre et n'est pas en général une base de $\mathrm{Im}(f)$. Le théorème suivant apporte quelque précision sur ceci.

4.3. **Cas de la dimension finie : le théorème Noyau-Image.** Supposons à présent que les espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ soient de dimension finie.

Théorème 3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a alors*

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, il en est de même du sous-espace $\ker(f)$. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de $ker(f)$. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver des vecteurs linéairement indépendants $\{\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ tels que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ soit une base de E. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ à partir de cette base. D'après la remarque ci-dessus, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ de F est engendrée par la famille $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_p}), f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont dans $\ker(f)$, leurs images par f sont nulles et donc la famille $\mathcal{B}$ se réduit à $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Ainsi les vecteurs $f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$ engendrent $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est libre. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire nulle entre ces vecteurs :

$$\overrightarrow{0}_F = a_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + a_{p+2} f(\overrightarrow{e_{p+2}}) + \cdots + a_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Comme f est linéaire, il vient

$$\overrightarrow{0}_F = f(a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}).$$

Ainsi le vecteur $a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}}+a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}}+\cdots+a_n\overrightarrow{e_n}$ est dans le noyau de f. Comme $\{\overrightarrow{e_1},\cdots,\overrightarrow{e_p}\}$ est une base de $ker(f)$, nous avons donc

$$a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}}+a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}}+\cdots+a_n\overrightarrow{e_n}=b_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+b_p\overrightarrow{e_p}$$

soit

$$b_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+b_p\overrightarrow{e_p}-a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}}-a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}}+\cdots-a_n\overrightarrow{e_n}=\overrightarrow{0_E}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1},\cdots,\overrightarrow{e_p},\overrightarrow{e_{p+1}},\cdots,\overrightarrow{e_n}$ sont linéairement indépendants, nous en déduisons

$$b_1=\cdots=b_p=a_{p+1}=\cdots=a_n=0$$

et donc $\overrightarrow{0_F}=a_{p+1}f(\overrightarrow{e_{p+1}})+a_{p+2}f(\overrightarrow{e_{p+2}})+\cdots+a_nf(\overrightarrow{e_n})$ implique $a_{p+1}=\cdots=a_n=0$. La famille $\mathcal{B}=\{f(\overrightarrow{e_{p+1}}),\cdots,f(\overrightarrow{e_n})\}$ est donc libre dans $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est génératrice , c'est une base de cet espace. Ceci montre que

$$\dim \mathrm{Im}(f)=n-p=\dim E-\dim\ker(f)$$

d'où le théorème.

Définition 9. *Soit $f:E\to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle rang de f et on le note* $\mathrm{rg}(f)$ *la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$ *:*

$$\mathrm{rg}(f)=\dim \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi le théorème noyau image donne la valeur du rang :

$$\mathrm{rg}(f)=\dim E-\dim\ker(f).$$

On notera que dans cette formule la dimension de F n'intervient pas.

4.4. **Applications.**

(1) Pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(f)=\dim F$. En effet, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, sa dimension est inférieure ou égale à celle de F et nous avons $\mathrm{Im}(f)=F$ si et seulement s'ils ont la même dimension.

(2) Rappelons qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi une application linéaire est bijective si et seulement si on a à la fois
   (a) $\ker(f)=\{\overrightarrow{0_E}\}$,
   (b) $\mathrm{rg}(f)=\dim F$.

(3) Supposons que $F=E$ c'est-à-dire que f soit une application linéaire

$$f:E\to E$$

On dit dans ce cas que l'application linéaire est un *endomorphisme* de E. Supposons que f soit injective. Alors $\ker(f)=\{\overrightarrow{0_E}\}$ et donc $\dim\ker(f)=0$. Ainsi

$$\dim E=\dim \mathrm{Im}(f).$$

Mais ici $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. Ils coïncident donc :

$$E=\mathrm{Im}(f).$$

Ainsi f est surjective donc bijective.

Proposition 8. *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors si f est injectif, il est aussi surjectf et donc bijectif. De même si f est surjectif, il est aussi injectif donc bijectif.*

Démonstration. La deuxième partie de cette proposition se démontre comme la première.

5. Calcul analytique. Matrices d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. La remarque qui suit va être la base du calcul analytique.

L'application linéaire f est entièrement déterminée dès que l'on connait les images des vecteurs d'une base de E.

Expliquons cette remarque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Si $\overrightarrow{X} \in E$, il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

et le n-uple $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathbb{B}$. Nous obtenons alors

$$\begin{array}{ll} f(\overrightarrow{X}) & = f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) \\ & = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}). \end{array}$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{X}$ étant donné, ses composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont aussi données et donc $f(\overrightarrow{X})$ peut être calculé dès que l'on connait les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$.

Donnons à présent une base de F : $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \cdots, \overrightarrow{f}_p\}$ (nous supposons $p = \dim F$). Chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e}_i)$ est dans F et se décompose ainsi

$$f(\overrightarrow{e}_i) = \alpha_{1,i}\overrightarrow{f}_1 + \alpha_{2,i}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + \alpha_{p,i}\overrightarrow{f}_p$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Rangeons ces coefficients $\alpha_{i,j}$ sont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$$

Dans ce rangement, le premier indice du coefficient $\alpha_{i,j}$ correspond au numéro de la ligne et le deuxième au numéro de la colonne contenant ce coefficient. En fait nous écrivons en colonne les composantes des transformées des vecteurs de la base de E dans l'ordre suivant $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_{n-1}}), f(\overrightarrow{e_n})$. Ce mode de rangement permet de trouver facilement les composantes du vecteur image $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ relative à la base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ donnée :

l'équation $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ est équivalente à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notons enfin que cette matrice de f ainsi déterminée dépend fortement des bases choisies de E et F. Dans la dernière partie de ce cours, nous regarderons comment trouver de "bonnes bases" afin que l'écriture matricielle de f en soit simplifiée.