UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Mathématiques et Informatiques

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 3

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$

Table des matières

Afin de pouvoir parler de longueur de vecteurs, d'angles de deux vecteurs, nous devons introduire une nouvel outil de mesure, à savoir le produit scalaire.

1. Le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$

1.1. Définition.

Définition 1. *On appelle produit scalaire euclidien dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \cdots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Cette application a les propriétés suivantes : Pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \in \mathbb{R}^n$,

(1) $(\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2}) \cdot \overrightarrow{Y} = \alpha_1 (\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{Y}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X_2} \cdot \overrightarrow{Y})$,
(2) $\overrightarrow{X} \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{Y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{Y_2}) = \alpha_1 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_2})$

Une telle application, a deux variables de $\mathbb{R}^n$, vérifiant les deux propriétés ci-dessus est appelée une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. L'étude générale de telles applications sur un espace vectoriel réel ou complexe seront étudiées au second semestre.

Quelques propriétés du produit scalaire euclidien

(1) Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'identité
$$\forall \overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^n, \ \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$
implique $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
Démonstration. En effet, posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$. Prenons dans un premier temps $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} = (1, 0, \cdots, 0)$. Alors $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{e_1} = 0$ implique $x_1 = 0$. De même, en prenant $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_i}$, nous obtenons $x_i = 0$ et en déduisons $\overrightarrow{X} = 0$.

(2) Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$ **non nul**
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} > 0.$$
En effet $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

(3) Le produit scalaire est commutatif :
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{X}.$$

Lorsque nous considérerons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire euclidien, nous parlerons alors de $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel euclidien.

Définition 2. *Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, on appelle norme du vecteur $\overrightarrow{X}$, le scalaire*
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}}.$$

Nous avons donc, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$
Ceci montre que la norme d'un vecteur est bien définie. Nous avons aussi
$$||\overrightarrow{0}|| = 0.$$
L'interprétation géométrique de cette fonction norme, qui est bien une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles mais bien entendu non linéaire, est d'associer à tout vecteur, sa longueur.

Proposition 1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$, nous avons*
$$|\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}| \leq ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||.$$

Démonstration. En effet, si nous posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$, alors
$$(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 = (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 = \sum_i x_i^2y_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_iy_ix_jy_j.$$
De même
$$(||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \sum_{i,j} x_i^2y_j^2.$$
On en déduit
$$(||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||)^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 = \sum_{i<j}(x_iy_j - x_jy_i)^2.$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'en déduit.

Proposition 2. *(Inégalité de Minkowski.) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$, nous avons*
$$||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}|| \leq ||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||.$$

Démonstration. En effet, si nous posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$, alors
$$(||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + 2\sqrt{\sum_{i,j} x_i^2y_j^2}.$$
De même
$$(||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 = \sum_i(x_i + y_i)^2 = \sum_i(x_i^2 + y_i^2 + 2x_iy_i).$$
Ainsi
$$(||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2 - (||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 = 2\sqrt{\sum_{i,j} x_i^2y_j^2} - 2\sum_i x_iy_i.$$
Nous en déduisons que
$$(||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 \leq (||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2$$

Nous remarquons que l'égalité pour ces deux relations n'a lieu que lorsque $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont liés.

1.2. **Bases orthonormées.** Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs de cette base vérifient

(1) $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i} = 1$,
(2) $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ dès que $i \neq j$.

La représentation habituelle de repère canonique dans la plan ou dans l'espace conduit à la définition naturelle de l'orthogonalité de deux vecteurs, orthogonalité qui est "vérifiée" par la représentation de la base canonique :

Définition 3. *Deux vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul :*
$$\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2} = 0.$$

Ainsi les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux et sont de longueur 1. Nous dirons qu'une telle base est une base orthonormée. D'une manière générale,

Définition 4. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Nous dirons que c'est une base orthonormée si les vecteurs de cette base vérifient*

(1) pour tout $i = 1, \cdots, n$, $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = 1$,

(2) pour tout $i \neq j$, $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = 0$.

1.3. **Deuxième définition du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.** Commençons par interpréter le produit scalaire dans le plan, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs du plan vectoriel

$$\overrightarrow{X_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{X_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}.$$

Nous avons

$$\left| \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\| \left\|\overrightarrow{X_2}\right\|} \right| \leq 1.$$

En effet $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1 + y_1)^2(x_2 + y_2)^2$. Nous pouvons donc interpréter ce nombre comme le cosinus d'un angle, mais ceci nécessite que l'angle formé par les deux vecteurs de base soit un angle droit.

Ainsi, par définition

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{||\overrightarrow{X_1}||\ ||\overrightarrow{X_2}||}$$

et θ désigne l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ du plan.

Théorème 1. *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = ||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Y}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

où $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ désigne l'angle des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$.

Ainsi, comme dans l'exemple ci-dessus, une représentation cartésienne d'un repère orthonormé est donnée par des vecteurs de longueur 1 et deux à deux perpendiculaires.

2. Les isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

2.1. **Définition.** Nous nous proposons d'étudier ici les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui laissent "invariant" le produit scalaire. Rappelons tout d'abord qu'un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel E et une application linéaire de E à valeurs dans ce même espace.

Définition 5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est une isométrie linéaire si pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}.$$

Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base canonique. Si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, alors

$$f(\overrightarrow{X}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}),\ f(\overrightarrow{Y}) = y_1 f(\overrightarrow{e_1}) + y_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + y_n f(\overrightarrow{e_n})$$

et

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \sum_{i,j} x_i y_j f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}).$$

Si f est une isométrie

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \sum_i x_i y_i.$$

Nous en déduisons que f est une isométrie si et seulement si

(1) $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}) = 0$ si $i \neq j$,

(2) $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_i}) = 1$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Dans le chapitre suivant, nous développerons ces identités pour $n = 2$ et $n = 3$.

2.2. Propriétés géométriques des isométries.

Proposition 3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. Alors f est une isométrie linéaire si et seulement si pour tout $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||.$$

Autrement dit une isométrie conserve les longueurs.

Démonstration. Si f est une isométrie, alors pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}$$

et donc $||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||$. Inversement, supposons que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui conserve les longueurs. Nous aurons en particulier, pour tous $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$f(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) \cdot (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}).$$

En développant, nous obtenons

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) + f(\overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) + 2f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Y} + 2\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}.$$

Or par hypothèse, $f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}, f(\overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Y}$. Nous en déduisons

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

ce qui montre que f est une isométrie.

Proposition 4. *Les isométries conservent les angles.*

Démonstration. Soient f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = ||f(\overrightarrow{X})||||f(\overrightarrow{Y})|| \cos(f(\overrightarrow{X}), f(\overrightarrow{Y})) = ||\overrightarrow{X}|| \cdot ||\overrightarrow{Y}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}).$$

Comme f est une isométrie, $||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||, |f(\overrightarrow{Y})|| = ||\overrightarrow{Y}||$. Ainsi

$$\cos(f(\overrightarrow{X}), f(\overrightarrow{Y})) = \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

d'où la proposition.

3. Bases orthonormales. Le procédé de Gram-Schmidt

3.1. **Bases orthonormales.** Nous avons vu que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est orthogonale, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$$

dès que $i \neq j$. Cette base est même orthonormée (ou orthonormale) chacun des vecteurs de base est de longueur 1. Bien entendu ce n'est pas l'unique base de $\mathbb{R}^n$ qui soit orthonormée (ou orthonormale).

Définition 6. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Une base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de F est dite*

(1) orthogonale si pour tout i, j :
$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = 0.$$
(2) orthonormée si elle est orthogonale et pour tout i, $||v_i|| = 1$.

Remarquons que si la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ était une famille génératrice de F, elle en serait une base. En effet

Théorème 2. *Toute famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.*

Démonstration. Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux. Soit $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \overrightarrow{0}$ alors $(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p) \cdot v_1 = \overrightarrow{0} \cdot v_1$ d'où $\alpha ||v_1||^2 = 0$. Mais puisque $v_1 \neq \overrightarrow{0}$ on a $||v_1|| \neq 0$ et donc l'égalité précédente implique $\alpha_1 = 0$. On montre de même que, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $\alpha_i = 0$. Ainsi la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est libre.

3.2. **Un procédé d'orthogonalisation.**

Théorème 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors F admet une base orthonormale.*

Démonstration. La démonstration qui suit donne le **principe de construction d'une telle base orthonormale à partir d'une base de F donnée**. Soit donc $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2},, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ une base de F. Considérons les p vecteurs $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2},, \cdots, \overrightarrow{w_p}\}$ définis de proche en proche par les relations

$$\begin{cases} \overrightarrow{w_1} & = \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{w_2} & = a_{2,1}\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{w_3} & = a_{3,1}\overrightarrow{w_1} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_3} \\ \cdots & \cdots \\ \overrightarrow{w_{p-1}} & = a_{p-1,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p-2,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p-1,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + \overrightarrow{v_{p-1}} \\ \overrightarrow{w_p} & = a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p} \end{cases}$$

Il est clair que ces vecteurs sont encore linéairement indépendants ($detMat_{\{e_1,\cdots,e_n\}}(w_1, \cdots, w_n) = 1$) et forment donc une nouvelle base de F. Montrons que l'on peut choisir les coefficients $a_{i,j}$ de manière à ce que ces vecteurs soient orthogonaux deux à deux. La méthode est simple : On commence par déterminer $a_{2,1}$ pour que $\overrightarrow{w_2}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$. Une fois ce coefficient choisi, on détermine $a_{3,1}$ et $a_{3,2}$ pour que $\overrightarrow{w_3}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$. On procède ainsi jusqu'au rang p.

(1) Ecrivons que $\overrightarrow{w_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$:

$$\overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_1} = a_{2,1}\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_1} = 0$$

ce qui donne

$$a_{2,1} = -\frac{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_1}}{\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1}} = -\frac{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_1}||^2}.$$

On a donc $\overrightarrow{w_2} = -\dfrac{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_1}||^2}w_1 + v_2$ avec $w_1 \cdot w_2 = 0$.

(2) Ecrivons que $\overrightarrow{w_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$ et à $\overrightarrow{w_2}$:

$$\begin{cases} a_{3,1}\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1} = 0 \\ a_{3,1}\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_2} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_2} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a_{3,1} = -\dfrac{\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1}}{\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1}} \\ \\ a_{3,2} = -\dfrac{\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1}}{\overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_2}} \end{cases}$$

d'où $\overrightarrow{w_3} = v_3 - \dfrac{\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_2}||^2}w_2 - \dfrac{\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_1}||^2}w_1$.

(3) Ainsi de suite jusqu'à la détermination du vecteur $\overrightarrow{w_p}$. Nous déterminons les coefficients $a_{p,1}, \cdots, a_{p,p-1}$ en résolvant le système

$$\begin{cases} (a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p})\cdot\overrightarrow{w_1} = 0 \\ (a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p})\cdot\overrightarrow{w_2} = 0 \\ \cdots \\ (a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p})\cdot\overrightarrow{w_{p-1}} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\overrightarrow{w_p} = v_p - \dfrac{\overrightarrow{v_p}\cdot\overrightarrow{w_{p-1}}}{||\overrightarrow{w_{p-1}}||^2}w_{p-1} - \cdots - \dfrac{\overrightarrow{v_p}\cdot\overrightarrow{w_1}}{||\overrightarrow{w_1}||^2}w_1$. La base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \cdots, \overrightarrow{w_{p-2}}, \overrightarrow{w_{p-1}}, \overrightarrow{w_p}\}$ ainsi trouvée est orthonormale. Si nous voulons une base orthonormée, on considère alors les vecteurs

$$\overrightarrow{w_i'} = \frac{\overrightarrow{w_i}}{||\overrightarrow{w_i}||}.$$

On a bien

$$||\overrightarrow{w_i'}|| = \sqrt{\frac{\overrightarrow{w_i}}{||\overrightarrow{w_i}||}\cdot\frac{\overrightarrow{w_i}}{||\overrightarrow{w_i}||}} = \frac{\sqrt{\overrightarrow{w_i}\cdot\overrightarrow{w_i}}}{||\overrightarrow{w_i}||} = 1.$$

(On peut simplement utiliser la propriété d'une norme, i.e.$||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda|||\overrightarrow{u}||$ pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}$ et vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$)

Remarque. Le procédé d'orthogonalisation d'une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ reste bien entendu valable pour l'espace $\mathbb{R}^n$. A partir d'une base quelconque non orthogonale de $\mathbb{R}^n$, nous en déduisons une base orthogonale et donc orthonormée. Rappelons que la base canonique est déjà orthonormée. Les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthormée, en particulier de la base canonique à une base orthonormée ont une structure particulière. Elles s'appellent des **matrices orthogonales**. Nous les étudierons en fin de chapitre.

4. Projections orthogonales

4.1. **Supplémentaire orthogonal.** Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Définition 7. *On dit qu'un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal à F si, pour tout $\overrightarrow{X} \in F$ et $\overrightarrow{Y} \in F_2$,*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0.$$

En particulier, si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, comme elle est orthonormée, toute droite vectorielle engendrée par l'un des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ est orthogonale à toute droite vectorielle engendrée par un vecteur $\overrightarrow{e_j}$ dès que $i \neq j$.

Théorème 4. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Il existe un* **unique** *sous-espace vectoriel, noté $F^\perp$, orthogonal à F tel que*

$$F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n.$$

L'espace vectoriel $F^\perp$ est appelé l'orthogonal de F. C'est donc un supplémentaire de F (il vérifie donc en particulier $\dim F^\perp = n - p$).

Démonstration. Considérons l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F. Cet ensemble est non vide car il contient le vecteur nul. Si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à F et si a et b sont deux scalaires, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{Z}$ de F, nous avons

$$(a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z} = a(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}) + b(\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z}) = 0.$$

Ainsi $a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y}$ est encore orthogonal et donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Notons-le $F^\perp$. Il vérifie en particulier

$$F \cap F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}.$$

En effet, si $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est un vecteur de cette intersection, il est orthogonal à lui-même, c'est-à-dire vérifie

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

ce qui implique $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$. Ainsi $F \cap F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$. Il nous reste à montrer que les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Comme déjà leur intersection est réduite au vecteur nul, il suffit de montrer que $\dim F + \dim F^\perp = n$ soit $\dim F^\perp = n - p$. Nous savons que F admet une base orthonormale. Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ une telle base. Complétons cette base en une base de $\mathbb{R}^n$: $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt transforme cette base en une base orthonormale mais en laissant invariants les p premiers vecteurs car ils sont déjà orthogonaux deux à deux et le procédé opère sur le $(p+1)$-ième vecteur, puis le $(p+2)$-ième, etc. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$ cette base. Considérons le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\{\overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$. Il est orthogonal à F donc contenu dans $F^\perp$, de dimension $n-p$. Dans cette base $\mathcal{B}$, tout vecteur orthogonal à F est une combinaison linéaire des vecteurs $\{\overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$. Ainsi cet espace coïncide avec $F^\perp$ d'où $\dim F^\perp = n-p$. On en déduit que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

4.2. **Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.** Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de projection d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace vectoriel F_1 parallèlement à un supplémentaire F_2. Nous reprenons ici cette définition mais en considérant comme supplémentaire l'orthogonal de F_1.

Définition 8. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $F^\perp$ son supplémentaire orthogonal. On appelle projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$ sur F, la projection de $\overrightarrow{X}$ sur F le long de $F^\perp$.*

Ainsi, comme $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$, le vecteur $\overrightarrow{X}$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}$$

avec $\overrightarrow{X}_F \in F$ et $\overrightarrow{X}_{F^\perp} \in F^\perp$. La projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur F est le vecteur $\overrightarrow{X}_F$. Nous la noterons p_F :

$$p_F(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_F.$$

Nous pouvons également définir la projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur $F^\perp$:

$$p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_{F^\perp}$$

ce qui nous donne

$$\overrightarrow{X} = p_F(\overrightarrow{X}) + p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}).$$

Théorème 5. *(Théorème de Pythagore) Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$*

$$||\overrightarrow{X}||^2 = ||\overrightarrow{X}_F||^2 + ||\overrightarrow{X}_{F^\perp}||^2.$$

Démonstration. En effet, comme $\overrightarrow{X} = p_F(\overrightarrow{X}) + p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}$ et $\overrightarrow{X}_F \cdot \overrightarrow{X}_{F^\perp} = 0$, alors

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = (\overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}) \cdot (\overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}) = (\overrightarrow{X}_F \cdot \overrightarrow{X}_F) + (\overrightarrow{X}_{F^\perp} \cdot \overrightarrow{X}_{F^\perp}).$$

D'où le théorème.

Calcul pratique de $\overrightarrow{X}_F$. Considérons une base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de F. Alors

$$\overrightarrow{X}_F = (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_p})\overrightarrow{v_p}.$$

Remarque : distance d'un point à un sous-espace vectoriel. La notion de point n'existe pas dans le cadre des espaces vectoriels euclidiens ou pas. Les éléments sont des vecteurs. Pour pouvoir parler de points, il faut munir l'ensemble $\mathbb{R}^n$ d'une autre structure dont les éléments seront les points. On parle alors de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Qu'est-ce qu'un espace affine ? Cette notion sera définie dans le cours de géométrie de troisième année. Nous allons toutefois nous passer de cette définition générale et la particulariser au cas de $\mathbb{R}^n$. Les éléments de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ sont appelés les points, que l'on notera par une majuscule telle que M, un de ces points joue un rôle particulier, nous choisirons comme point particulier, appelé origine le point O de coordonnées $(0, 0, \cdots, 0)$ et il existe une bijection naturelle

$$\varphi_O : \mathbb{R}^n(affine) \to \mathbb{R}^n(vectoriel)$$

donnée par

$$\varphi_O(M) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{X}$$

où les composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$ sont les coordonnées de M. Nous pouvons alors établir la définition suivante

Définition 9. *Soit $M = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un point de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On appelle distance de M à F*

$$d(M, F) = ||\overrightarrow{X}_{F^\perp}||$$

où $\overrightarrow{X}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ associé au point M.

Nous étudierons plus en détail cette notion dans le cadre de la dimension 2 et 3.

5. Symétrie orthogonale

5.1. **Hyperplan.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on appelle hyperplan vectoriel tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ (on dit aussi de codimension 1). Ainsi un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire (c'est-à-dire d'une application linéaire à valeurs dans le corps $\mathbb{R}$ des scalaires). Il est donc défini par une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

l'un au moins des coefficients a_i étant non nul. Par exemple, un hyperplan dans $\mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel de dimension 2, un hyperplan dans $\mathbb{R}^2$ est une droite vectorielle de dimension 1.

5.2. **Symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel.** Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan vectoriel défini par l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Son espace orthogonal $\mathcal{H}^\perp$ est donc de dimension 1, c'est une droite vectorielle. Comme

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$$

tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} + \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}$$

avec $\overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ et $\overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp} \in \mathcal{H}^\perp$.

Définition 10. *Soit $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} + \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle symétrique orthogonal de $\overrightarrow{X}$ par rapport à l'hyperplan $\mathcal{H}$ le vecteur $\overrightarrow{Y}$ défini par*

$$\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} - \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}.$$

Nous noterons $s_{\mathcal{H}}$ l'application

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} - \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}.$$

Cette application est linéaire et nous l'appellerons la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{H}$. Elle vérifie

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) \circ s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) = Id.$$

Une application linéaire qui vérifie une telle relation $f \circ f = Id$ est appelée une **involution**. Elle est donc bijective et son application inverse est l'application elle-même :

$$s_{\mathcal{H}}^{-1} = s_{\mathcal{H}}.$$

Notons également que cette application laisse invariants tous les vecteurs de $\mathcal{H}$.

5.3. **Matrices d'une symétrie orthogonale.** Soit $s_{\mathcal{H}}$ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathcal{H}$. Pour écrire une matrice de cette application linéaire (qui est un endomorphisme et même un isomorphisme c'est-à-dire un endomorphisme bijectif), nous allons choisir une base adaptée à cette géométrie. Considérons donc une base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_{n-1}}\}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{H}$ et $\{\overrightarrow{v_n}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}^{\perp}$. La base donnée de $\mathbb{R}^n$ est donc aussi orthonormée. La symétrie vérifie donc

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{v_i} = \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

et

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{v_n}) = -\overrightarrow{v_n}.$$

Nous en déduisons que la matrice de $s_{\mathcal{H}}$ relative é cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Matrice d'une isométrie relative à une base orthonormée

6.1. **Un retour sur la définition d'une isométrie.** Rappelons qu'une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous avons vu également qu'une isométrie conservait les longueurs et les angles. Nous en avons déduit

Proposition 5. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\{f(\overrightarrow{v_1}), f(\overrightarrow{v_2}), \cdots, f(\overrightarrow{v_n})\}$$

est aussi une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ étant orthonormée, son image $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ par l'isométrie f sera une base orthonormée. Nous allons nous servir de cette propriété pour écrire une matrice de l'application linéaire f.

6.2. **Matrice d'une isométrie relative à une base orthonormée.** Rappelons que pour écrire une matrice d'un endomorphisme, nous nous donnons au préalable une base de $\mathbb{R}^n$, nous calculons les transformés des vecteurs de cette base que nous écrivons en colonne ce qui nous donne la matrice de taille $n \times n$. Prenons comme base, la base canonique qui est orthonormée. Les transformés des vecteurs de cette base s'écrivent

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{v_1}) & = a_{1,1}\overrightarrow{e_1} + a_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,1}\overrightarrow{e_n} \\ f(\overrightarrow{v_2}) & = a_{1,2}\overrightarrow{e_1} + a_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,2}\overrightarrow{e_n} \\ \cdots & \\ f(\overrightarrow{v_n}) & = a_{1,n}\overrightarrow{e_1} + a_{2,n}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,n}\overrightarrow{e_n} \end{cases}$$

La matrice correspondante se formant en mettant en colonne les coefficients de ces vecteurs, elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

que nous noterons aussi $A = (a_{i,j})$, le premier indice est celui de la ligne et le deuxième celui de la colonne. Comme chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e_i})$ est de norme 1, les coefficients de chacune des colonnes vérifient

$$f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_i}) = 1 = a_{1,i}^2 + a_{2,i}^2 + \cdots + a_{n,i}^2.$$

De même les relations $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}) = 0$ pour $i \neq j$ impliquent

$$a_{1,i}a_{1,j} + a_{2,i}a_{2,j} + \cdots + a_{n,i}a_{n,j} = 0.$$

L'écriture matricielle suivante synthétise ces deux relations : soit ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice A, c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de la matrice A en écrivant que la première ligne de ${}^tA$ est la première colonne de A, la deuxième ligne de ${}^tA$ la deuxième colonne de A ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

Proposition 6. *Soit A la matrice d'une isométrie relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors elle vérifie*

$$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = Id_n$$

où Id_n est la matrice identité d'ordre n. Une telle matrice sera appelée une **matrice orthogonale**. *Inversement, si A est une matrice orthogonale, alors elle est la matrice relative à la base canonique d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$.*

Par exemple, une symétrie orthogonale est une isométrie, sa matrice dans la base canonique est orthogonale, par contre une projection orthogonale n'en est pas une. Nous allons déterminer dans le chapitre suivant toutes ces applications et matrices dans le cadre de la dimension 2 et 3.