Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques et Informatique

COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES CORRIGES (feuille 2)

Produit scalaire, produit vectoriel, isométries dans $\mathbb{R}^3$

Dans toutes cette feuille, les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont repérés par leur base orthonormée canonique.

Les corrections suivantes sont partielles et ne servent que d'aide au travail des étudiants et aux révisions.

Exercice 10. Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer son inverse. Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ayant A comme matrice relative à la base canonique, caractériser cette isométrie.

La matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale car

$${}^tAA = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Alors

$$A^{-1} = {}^t A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ayant A comme matrice relative à la base canonique. Comme $\det A = 1$ c'est une rotation. Donc elle est s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculons θ. On a

$$Tr(A) = \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\cos\theta$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{ou} \quad \theta = -\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Mais $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$ donc

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Est-elle orthonormée ?

(2) Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base canonique, puis dans $\mathcal{B}$.

(3) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$. Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\det P = 1 \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Elle n'est pas orthonormée puisque le produit scalaire $v_1 \cdot v_2 = 1 \neq 0$, les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

(2) La matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base canonique est

$$R_{\frac{\pi}{4},\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{B}$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ a pour matrice

$$R_{\frac{\pi}{4},\{v_1,v_2\}} = P^{-1} R_{\frac{\pi}{4},\{e_1,e_2\}} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

n'est pas une isométrie puisque la matrice est orthogonale mais dans une base non orthonormée. En effet si on se ramène à la base canonique qui elle est orthonormée on a la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et on constate bien que cette matrice est non orthogonale donc n'est pas la matrice d'une isométrie pour le produit scalaire canonique.

(4) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique est
$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
n'est pas une isométrie car la base canonique est orthonormée et la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée est orthogonale mais cette matrice n'est pas orthogonale puisque ${}^tCC \neq Id$.

Exercice 13. Parmi les matrices suivantes, lesquelles représentent des isométries de $\mathbb{R}^3$?
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Une matrice M est la matrice d'un endomorphisme **dans une base orthonormée** par exemple la base canonique si et seulement si c'est une matrice orthogonale, et elle vérifie ${}^tMM = Id$. Si on a la matrice d'une isométrie dans une base non orthonormée, alors M n'est pas orthogonale mais $\det M \in \{-1, 1\}$. Cependant une matrice M de déterminant 1 ou -1 n'est pas forcément la matrice d'une isométrie. Ce que l'on peut résumer ainsi

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(1) M est la matrice d'un isométrie dans une base orthonormée $\Leftrightarrow {}^tMM = Id$

(2) $\det M \notin \{-1, 1\} \Rightarrow M$ n 'est pas la matrice d'une isométrie

(3) Si $\det M \in \{-1, 1\}$ on ne peut rien dire.

La matrice
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
vérifie que ${}^tAA = Id$ donc A est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$
est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée car ${}^tBB = Id$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
n'est pas la matrice d'une isométrie car $\det C \notin \{-1, 1\}$

Exercice 16. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$. Déterminer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

On note $p_{\mathcal{P}}$ la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ c'est à dire une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. La matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$

dans une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ adaptée à la décompostion de $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$ de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathcal{P}$ et que $\{v_3\}$ est une base de $\mathcal{P}^\perp$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet si v est un vecteur du plan, $p_{\mathcal{P}}(v) = v$ et si $v \in \mathcal{P}^\perp$ alors $p(v) = 0$. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\perp$ sont en somme directe et supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$) la famille contituée d' une base de $\mathcal{P}$ et d'une base de $\mathcal{P}^\perp$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cherchons donc une base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathcal{P}$. On a $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + 2z = 0\} = \{(y - 2z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1),\ y, z \in \mathbb{R}\}$ Ainsi la famille $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-2, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{P}$ et puisque c'est aussi une famille libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), c'est une base de $\mathcal{P}$.

Prenons $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 2)$. c'est un vecteur non nul de $\mathcal{P}^\perp$. Comme $\dim \mathcal{P}^\perp = 1$, $\{v_3 = (1, -1, 2)\}$ est une base de $\mathcal{P}^\perp$.

Alors la matrice B de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-2, 0, 1), v_3 = (1, -1, 2)\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ est alors $A = P^{-1}BP$ où P est la matrice de changement de base de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. On connaît la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

dont la première colonne est constituée des coordonnées du vecteur v_1 dans la base canonique (la deuxième des coordonnées du vecteur v_2 dans la base canonique et la 3ième, des coordonnées du vecteur v_3 dans la base canonique). C'est donc la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. C'est donc la matrice P^{-1}. Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque. Si on avait choisi une base orthonormée de $\mathcal{P}$, par exemple

$$\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)\}$$

alors en prenant $w_3 = w_1 \wedge w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ la famille $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ serait une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et la matrice Q de changement de base de la base orthonormée $\mathcal{B}_2$ à la base (orthonormée) canonique est une matrice orthogonale donc $Q^{-1} = {}^tQ$. La matrice de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ est aussi la matrice B et

$$A = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

(1) Déterminer la matrice A relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. (On pourra déterminer la matrice de cette application dans une base orthonormée choisie puis on en déduira la matrice cherchée).

(2) On considère le plan d'équation $2x+y-z = 0$. Déterminer la matrice A_2 relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Que représente la transformation ayant pour matrice le produit A_1A_2 ?

(1) Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y+2z = 0$. Notons $s_{\mathcal{P}}$ la projection orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. La matrice A de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique est alors obtenue en mettant dans la 1ère colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_1)$ dans la base canonique, dans la 2ième colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_2)$ dans la base canonique et enfin dans la 3ième colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_3)$ dans la base canonique. Mais on a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathbb{R}^3$. La matrice d'une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dans une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ adaptée à la décompostion de $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathcal{P}$ et que $\{v_3\}$ est une base de $\mathcal{P}^{\perp}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet si v est un vecteur du plan, $s_{\mathcal{P}}(v) = v$ et si $v \in \mathcal{P}\perp$ alors $s_{\mathcal{P}}(v) = -v$. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{\perp}$ sont en somme directe et supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathbb{R}^3$) la famille contituée d' une base de $\mathcal{P}$ et d'une base de $\mathcal{P}^{\perp}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est alors $A = P^{-1}BP$ où P est la matrice de changement de base de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

D'après l'exercice 16, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque. Si on avait choisi une base orthonormée pour $\mathcal{P}$ par exemple $\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\}$ alors en prenant $w_3 = w_1 \wedge w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ la famille $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et la matrice Q de changement de base de la base orthonormée $\mathcal{B}_2$ à la base (orthonormée) canonique est une matrice orthogonale donc $Q^{-1} = {}^tQ$. La matrice de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ est aussi la matrice B et

$$A = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

(2) On considère maintenant le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminons la matrice A_2 relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan $\mathcal{P}_2$ comme ci-dessus. Pour cela prenons une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée á la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_2^\perp$: $\{v_4 = (1,0,2), v_5 = (0,1,1), v_6 = (-2,-1,1)\}$ avec $\{v_4, v_5\}$ une base (non orthogonale) de $\mathcal{P}_2$, $\{v_6 = v_4 \wedge v_5\}$ une base de $\mathcal{P}_2^\perp$. Alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La transformation ayant pour matrice le produit AA_2 dans la base canonique est l'endomorphisme $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_2}$.