Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques et Informatique

COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES

Produit scalaire, produit vectoriel, isométries dans $\mathbb{R}^3$

Dans toutes cette feuille, les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont repérés par leur base orthonormée canonique.

Exercice 1.

(1) Calculer le produit scalaire des vecteurs $(2,3,-1)$ et $(5,-4,2)$

(2) Déterminer k afin que les vecteurs $(1,k,3)$ et $(2,1,5)$ soient orthogonaux.

(3) Soit $\overrightarrow{X}=(2,1,-1)$. Calculer sa norme $||\overrightarrow{X}||$.

(4) Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit la distance $d(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})$ de la façon suivante
$$d(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=||\overrightarrow{X}-\overrightarrow{Y}||.$$
Calculer cette distance pour $\overrightarrow{X}=(1,5,-2)$ et $\overrightarrow{Y}=6,-1,-3)$.

Exercice 2. On considère les deux droites vectorielles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation
$$\mathcal{D}_1 : 2x-y=0, \quad \mathcal{D}_2 : x+2y=0.$$
Quelles sont les équations des bissectrices des angles de ces deux droites.

Exercice 3. Soient A et B deux points du plan tels que $OA=OB=1$ et d'angles polaires respectifs $a=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OA})$ et $b=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OB})$. Calculer de deux manières différentes $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et retrouver la formule classique donnant le développement de $\cos(a-b)$.

Exercice 4. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations
$$2x+3y+z=0,$$
$$3x-y-3z=0$$
sont perpendiculaires.

Exercice 5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation
$$2x+2y-z=0.$$

(1) Déterminer l'angle de $\mathcal{P}$ avec l'axe $\overrightarrow{Oz}$ (c'est l'angle d'un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{Oz}$)

(2) Déterminer l'angle de $\mathcal{P}$ avec la droite d'équation $x = y = z$.

Exercice 6. Soient $A = (1, 2)$ et $B = (4, 1)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'aire du triangle AOB ?

Exercice 7.

(1) Soient $A = (1, 5, 4)$ et $B = (-2, 3, -1)$ deux points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Quelle est l'aire du triangle AOB ?

(2) Soient $A = (1, 2, 3),\ B = (4, 1, 2),\ C = (2, 5, 1)$. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Exercice 8. On considère trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\overrightarrow{X} \wedge (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z})\overrightarrow{Y} - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})\overrightarrow{Z}.$$

Exercice 9. On considère les points $A = (1, 1, 0), B = (-1, 1, 0)$ et $C = (1, 2, 1)$.

(1) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

(2) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

Exercice 10. Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer son inverse. Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ayant A comme matrice relative à la base canonique, caractériser cette isométrie.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1, 0), \overrightarrow{v_2} = (1, 1)\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Est-elle orthonormée ?

(2) Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base canonique, puis dans $\mathcal{B}$.

(3) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit f une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. On considère une autre rotation vectorielle g. Montrer que $\{g(\overrightarrow{e_1}), g(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ($\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est la base canonique). Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ?

Exercice 13. Parmi les matrices suivantes, lesquelles représentent des isométries de $\mathbb{R}^3$?

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix},\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -6 & -2\\ -6 & -2 & -3\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étudier les applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -6 & -2\\ -6 & -2 & -3\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

(1) Déterminer la matrice A relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. (On pourra déterminer la matrice de cette application dans une base orthonormée choisie puis on en déduira la matrice cherchée).

(2) On considère le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminer la matrice A_2 relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Que représente la transformation ayant pour matrice le produit A_1A_2 ?

Exercice 16. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$. Déterminer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.

Les corrections suivantes sont partielles et ne servent que d'aide au travail des étudiants et aux révisions.

Exercice 10. La matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

est orthogonale car ${}^tAA = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = Id$. Alors $A^{-1} ={}^t A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Soit f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ayant A comme matrice relative à la base canonique. Comme $\det A = 1$ c'est une rotation. Donc elle est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Or la trace de deux matrices semblables est conservée donc $Tr(A) = \frac{2}{\sqrt{5}} = Tr(B) = 2\cos\theta$ d'où $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$.

(1) $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Elle n'est pas orthonormée puisque $v_1\dot{v}_2 = 1 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

(2) La matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base canonique est

$$R_{\frac{\pi}{2},\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4})\\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Ainis dans $\mathcal{B}$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour matrice

$$R_{\frac{\pi}{2},\{v_1,v_2\}} = P^{-1}R_{\frac{\pi}{2},\{e_1,e_2\}}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} = \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

n'est pas une isométrie puisque la matrice est orthogonale mais dans une base non orthonormée. En effet si on se ramène à la base canonique qui elle est orthonormée on a la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et on constate bien que cette matrice est non orthogonale donc n'est pas la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

(4) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas une isométrie car la base canonique est orthonormée et la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée est orthogonale mais cette matrice n'est pas orthogonale puisque ${}^tCC \neq Id$.

Exercice 13. Une matrice M est la matrice d'un endomorphisme **dans une base orthonormée** par exemple la base canonique si et seulement si c'est une matrice orthogonale, et elle vérifie ${}^tMM = Id$. Si on a la matrice d'une isométrie dans une base non orthonormée, alors M n'est pas orthogonale mais $\det M \in \{-1, 1\}$. Cependant une matrice M de déterminant 1 ou -1 n'est pas forcément la matrice d'une isométrie. Ce que l'on peut résumer ainsi

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(1) M est la matrice d'un isométrie dans une base orthonormée $\Leftrightarrow {}^tMM = Id$

(2) $\det M \notin \{-1, 1\} \Rightarrow M$ n 'est pas la matrice d'une isométrie

(3) Si $\det M \in \{-1, 1\}$ on ne peux rien dire.

La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie que ${}^tAA = Id$ donc A est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée car ${}^tBB = Id$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

n'est pas la matrice d'une isométrie car $\det C \notin \{-1,1\}$

Exercice 16. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y+2z=0$. Déterminer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan. On note $p_{\mathcal{P}}$ la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ c'est à dire une application inéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. La matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dans une base $\{v_1,v_2,v_3\}$ adaptée à la décompostion de $\mathcal{P}\oplus\mathcal{P}^\perp$ de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire que $\{v_1,v_2\}$ est une base de $\mathcal{P}$ et que $\{v_3\}$ est une base de $\mathcal{P}^\perp$ est

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

En effet si v est un vecteur du plan, $p_{\mathcal{P}}(v)=v$ et si $v\in\mathcal{P}\perp$ alors $p(v)=0$. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\perp$ sont en somme directe et supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathcal{P}\oplus\mathcal{P}^\perp$) la famille contituée d' une base de $\mathcal{P}$ et d'une base de $\mathcal{P}^\perp$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cherchons donc une base $\{v_1,v_2\}$ de $\mathcal{P}$. On a $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x-y+2z=0\}=\{(-y+2z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(1,1,0)+z(-2,0,1),\ y,z\in\mathbb{R}\}$ Ainsi la famille $\{v_1=(1,1,0),v_2=(-2,0,1)\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{P}$ et puisque c'est aussi une famille libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) c'est aussi une famille libre de $\mathcal{P}$ donc une bases de $\mathcal{P}$.

Prenons $v_3=v_1\wedge v_2=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(1,1,2)$. c'est un vecteur non nul de $\mathcal{P}^\perp$ qui est de dimension 1 donc $\{v_3=(1,-1,2)\}$ est une base de $\mathcal{P}^\perp$.

Alors la matrice B de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base $\{v_1=(1,1,0),v_2=(-2,0,1),v_3=(1,-1,2)\}$ est

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

La matrice de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique $\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ est alors $A=P^{-1}BP$ où P est la matrice de changement de base de la base $\{v_1,v_2,v_3\}$ à la base $\{e_1,e_2,e_3\}$. On connaît la matrice

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

dont la première colonne est constituée des coordonnées du vecteur v_1 dans la base canonique (la deuxième des coordonnées du vecteur v_2 dans la base canonique et la 3ième, des coordonnées du vecteur v_3 dans la base canonique). C'est donc la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\{v_1,v_2,v_3\}$. C'est donc la matrice P^{-1}. Ainsi

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{5}{6}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{5}{6}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Remarque.

Si on avait choisi une base orthonormée pour $\mathcal{P}$ par exemple $\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\}$ alors en prenant $w_3 = w_1 \wedge w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ la famille $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et la matrice Q de changement de base de la base orthonormée $\mathcal{B}_2$ à la base (orthonormée) canonique est une matrice orthogonale donc $Q^{-1} =^t Q$. La matrice de $p_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ est aussi la matrice B et

$$A = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 15. (1) Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y+2z=0$. Notons $s_{\mathcal{P}}$ la projection orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. C'est unendomorphisme de $\mathbb{R}^3$. La matrice A de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique est alors obtenue en mettent dans la 1ère colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_1)$ dans la base canonique, dans la 2ième colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_2)$ dans la base canonique et enfin dans la 3ième colonne les composante de $s_{\mathcal{P}}(e_3)$ dans la base canonique. Mais on a $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathbb{R}^3$. La matrice d'une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dans une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ adaptée à la décompostion de $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathcal{P}$ et que $\{v_3\}$ est une base de $\mathcal{P}^{\perp}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet si v est un vecteur du plan, $s_{\mathcal{P}}(v) = v$ et si $v \in \mathcal{P} \perp$ alors $s_{\mathcal{P}}(v) = -v$. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^{\perp}$ sont en somme directe et supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$) la famille contituée d' une base de $\mathcal{P}$ et d'une base de $\mathcal{P}^{\perp}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base canonique $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est alors $A = P^{-1}BP$ où P est la matrice de changement de base de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

D'après l'exercice 16, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque.

Si on avait choisi une base orthonormée pour $\mathcal{P}$ par exemple $\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\}$ alors en prenant $w_3 = w_1 \wedge w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ la famille $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et la matrice Q de changement de base de la base orthonormée $\mathcal{B}_2$ à la base (orthonormée) canonique est une matrice orthogonale donc $Q^{-1} =^t Q$. La matrice de $s_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ est aussi la matrice B et

$$A = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t\!\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{-2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

(2) On considère maintenant le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminons la matrice A_2 relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan $\mathcal{P}_2$ comme ci-dessus. Pour cela prenons une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée á la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_2^{\perp}$: $\{v_4 = (1,0,2), v_5 = (0,1,1), v_6 = (-2,-1,1)\}$ avec $\{v_4, v_5\}$ une base (non orthogonale) de $\mathcal{P}_2$, $\{v_6 = v_4 \wedge v_5\}$ une base de $\mathcal{P}_2^{\perp}$. Alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{3} & \dfrac{-2}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La transformation ayant pour matrice le produit AA_2 dans la base canonique est l'endomorphisme $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_2}$.