Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2018/2019**
Licence 2 Mathématiques et Informatique

COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

cours Elisabeth Remm

Feuille d'exercices 3. Diagonalisation des matrices réelles ou complexes

Exercice 1. Soit la matrice **réelle**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Est-elle diagonalisable ?
2. Est-elle diagonalisable comme matrice complexe ?
3. Mêmes questions avec les matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$ en fonction de la variable $\lambda \in \mathbb{R}$ c'est à dire calculer le polynôme caractéristique de A en fonction de la variable $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Soit le système formé des vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Calculer AV_1. Que peut-on en déduire ? Mêmes questions pour AV_2 et AV_3.
5. Soit P la matrice de changement de bases de la base

$$\{E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

à la base $\{V_1, V_2, V_3\}$. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Exercice 3. Diagonaliser les matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\-2 & 5 & 2\\2 & -3 & 0\end{pmatrix},$$

Exercice 4. Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B.
2. Ces matrices sont-elles diagonalisables.

Exercice 5. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-3 & -3 & 3\\-2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

1. Calculer la valeurs propres de f.
2. Est-il diagonalisable ?
3. Calculer la matrice de $f \circ f$.

Exercice 6. Soit A une matrice carrée. Elle est dite nilpotente s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

1. Donner un exemple d'une matrice non nulle nilpotente d'ordre 2.
2. Déterminer les valeurs propres de A (on déterminera au préalable les valeurs propres de A^n en fonction de celles de A).
3. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente.

Exercice 7. On désigne par f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est
$$P_A(X) = -(X+1)^3.$$
2. Montrer sans calcul que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer le sous espace propre de A.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de a la matrice réelle
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & (1+a) \end{pmatrix}.$$
est diagonalisable ? Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n.

Exercice 9. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^2$ et en déduire A^2.

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont les valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ vérifiant
$$f(\overrightarrow{V}) = 2\overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}, \quad f(\overrightarrow{W}) = 2\overrightarrow{W} + \overrightarrow{V}.$$
4. Soit $\overrightarrow{T}$ un vecteur propre pour la valeur propre 1. Démontrer que la famille $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 11

1. Donner un exemple de matrice réelle d'ordre 2 diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de matrice réelle d'ordre 2 non diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Peut-elle être diagonalisable sur $\mathbb{R}$?