Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2020/2021**
Licence 2 MI

COMPLEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

Feuille d'exercices 3. Diagonalisation des endomorphismes réels ou complexes

Exercice 1. *Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice respective dans la base canonique $\mathcal{B}$ les matrices A et B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix},$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique ainsi que les valeurs propres de f (avec leurs multiplicités) .*

   Le polynôme caractéristique de f est

   $$c_f(X) = \det(A - XId) = X^2 - Tr(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

   Les valeurs propres de A sont les racines dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) donc $\lambda_1 = 2$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 2$.

2. *L'endormorphisme f est-il diagonalisable ? Si c'est le cas, on donnera une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, la matrice de f dans cette nouvelle base ainsi que la relation matricielle qui lie les matrices de f dans la base canonique et la base $\mathcal{B}'$.*

   D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si

   $$\begin{cases} r_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \\ \dim E_{\lambda_1=2} = r_1 = 2 \end{cases}$$

   où $E_{\lambda_1=2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = 2(x,y)\} = Ker(f - 2Id)$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ_1. La première condition est bien vérifiée. Pour la deuxième, déterminons

   $$E_{\lambda_1=2} = Ker(f - 2Id)$$

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned} (x,y) \in E_{\lambda_1=2} &\Leftrightarrow (A - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$E_{\lambda_1=2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=0\} = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0)\}.$$

Comme la famille $\{(1,0)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=2}$ et que c'est aussi une famille libre puisque $(1,0) \neq (0,0)$, la famille $\{(1,0)\}$ est une base de $E_{\lambda_1=2}$. Ainsi

$$\dim E_{\lambda_1=2} = 1.$$

Puisque $\dim E_{\lambda_1=2} = 1 \neq 2$, la deuxième condition du critère de diagonalisation n'est pas vérifié donc f **n'est pas diagonalisable.**

On aurait pu aussi montrer que f n'est pas diagonalisation en faisant une démonstration par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable. Alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit la matrice

$$A' = M_{f,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2Id$$

Or **cette matrice commute avec n'importe quelle matrice.** Alors

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2Id = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1} = P(2Id)P^{-1} = 2PP^{-1} = 2Id.$$

et puisque $A \neq 2Id$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

3. *Mêmes questions pour l'endomorphisme g.*

   On a

$$B = M_{\mathcal{B},g} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

   où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   Le polynôme caractéristique de g est

$$c_g(X) = \det(B - XId) = X^2 - Tr(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 12$$

   Calculons $\Delta = 16 - 4 \times 12 = -32 < 0$ donc $c_g(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Or les valeurs propres de $g \in End(\mathbb{R}^2)$ sont les racines dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) donc g **n'a pas de valeur propre.** L'endomorphisme $g \in End(\mathbb{R}^2)$ n'est donc pas diagonalisable. (la première condition du critère de diagonalisation n'est pas vérifié).

4. *Mêmes questions si on considère que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{C}^2$.*

Le polynôme caractéristique de $f \in End(\mathbb{C}^2)$ est

$$c_f(X) = (X-2)^2$$

(les calculs sont les mêmes) et $\lambda_1 = 2$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 2$. L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est

$$E_{\lambda_1=2} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ y = 0\} = \{(x,0);\ x \in \mathbb{C}\} = Vect_{\mathbb{C}}\{(1,0)\}.$$

On a donc $\dim E_{\lambda_1=2} = 1 \neq 2 = r_1$ et l'endomorphisme $f \in End(\mathbb{C}^2)$ n'est pas diagonalisable.

Pour l'endomorphisme $g \in End(\mathbb{C}^2)$:
le polynôme caractéristique de $g \in End(\mathbb{C}^2)$ est

$$c_g(X) = X^2 - 4X + 12 = (X - 2 + 2i\sqrt{2})(X - 2 - 2i\sqrt{2}) \in \mathbb{C}[X].$$

(comme $\Delta = -32 = (4i\sqrt{2})^2$, le polynôme $c_f(X)$ a deux racines complexes conjugués qui sont $X_1 = \frac{4-4i\sqrt{2}}{2} = 2 - 2i\sqrt{2}$ et $X_2 = \overline{X_1} = 2 + 2i\sqrt{2}$ et on peut factoriser $c_f(X)$ par $(X - X_1)$ et $(X - X_2)$)

Les valeurs propres de $g \in End(\mathbb{C}^2)$ sont les racines dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) donc $\lambda_1 = 2 - 2i\sqrt{2}$ est valeur propre de g de multiplicité $r_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2 + 2i\sqrt{2}$ est valeur propre de g de multiplicité $r_2 = 1$. Or pour tout $i \in \{1,2\}$, on sait que $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq r_i = 1$ ce qui implique que $\dim E_{\lambda_i} = 1 = r_i$. Ainsi on a

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2 = \dim \mathbb{C}^2, \\ \forall i \in \{1,2\},\ \dim E_{\lambda_i} = r_i = 1. \end{cases}$$

L'endomorphisme $g \in End(\mathbb{C}^2)$ est donc diagonalisable.

Pour trouver explicitement une base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$

$$B' = Mat_{g,\mathcal{B}'}$$

soit diagonale, on détermine une base de chacun des espaces propres.

Déterminons

$$E_{\lambda_1=2-2i\sqrt{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; f(x,y) = (2 - 2i\sqrt{2})(x,y)\} = Ker(f - (2 - 2i\sqrt{2})Id)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2 - 2i\sqrt{2}$:

Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in E_{\lambda_1=2-2i\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \left(A - (2-2i\sqrt{2})Id\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} & 1 \\ -8 & 2i\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = -2i\sqrt{2}x \end{aligned}$$

D'où

$$E_{\lambda_1=2-2i\sqrt{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ y = -2i\sqrt{2}x\} = \{(x, -2i\sqrt{2}x);\ x \in \mathbb{C}\} = Vect_{\mathbb{C}}\{(1, -2i\sqrt{2})\}.$$

Comme $(1, -2i\sqrt{2}) = v_1 \neq (0,0)$, l'espace vectoriel $E_{\lambda_1=2-2i\sqrt{2}}$ qui est de dimension 1 admet pour base $\{v_1\}$. De même, puisque $E_{\lambda_2=2+2i\sqrt{2}}$ est de dimension 1, on aura une base de cet espace vectoriel si on trouve un vecteur non nul appartenant à cet espace. Or la matrice B est réelle donc la matrice $\overline{B} = (\overline{b_{ij}}) = B$ d'où

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{2} \end{pmatrix} = (2-2i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \ & \Leftrightarrow \overline{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} = (2+2i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} = (2+2i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $v_2 = (1, 2i\sqrt{2}) = \overline{v_1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2 + 2i\sqrt{2} = \overline{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_1=2+2i\sqrt{2}} = Vect_{\mathbb{C}}\{v_2\}$. Comme g est diagonalisable on a $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \mathbb{C}^2$ on obtient que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ et

$$B' = M_{f,\mathcal{B}'} = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2-2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2+2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i\sqrt{2} & 2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \tfrac{1}{4i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} & -1 \\ 2i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i\sqrt{2} & 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} & -1 \\ 2i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-2i\sqrt{2} & 2+2i\sqrt{2} \\ -8-4i\sqrt{2} & -8+4i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 16+8i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -16+8i\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2+2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2. *Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice respective dans la base canonique les matrices A et B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

1. *Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B et déterminer leurs valeurs propres.*

   Le polynôme caractéristique de f est

   $$c_f(X) = c_A(X) = \det(A - X\,Id) = -(X-1)^2(X-2)$$

   donc les valeurs propres de $f \in End(\mathbb{R}^3)$ sont $\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 2 \in \mathbb{R}$ de multiplicité $r_2 = 1$.

Le polynôme caractéristique de g est

$$\begin{aligned}
c_g(X) &= c_B(X) = \det(B - X\,Id) = \det\begin{pmatrix} -X & 3 & 2 \\ -2 & 5-X & 2 \\ 2 & -3 & -X \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} -X+2 & 0 & -X+2 \\ -2 & 5-X & 2 \\ 2 & -3 & -X \end{pmatrix} \quad L_1 + L_3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C_3 - C_1 \\
&= \det\begin{pmatrix} -X+2 & 0 & 0 \\ -2 & 5-X & 4 \\ 2 & -3 & -X-2 \end{pmatrix} \\
&= (-X+2)\det\begin{pmatrix} 5-X & 4 \\ -3 & -X-2 \end{pmatrix} = -(X+2)[(5-X)(-X-2)+12] \\
&= -(X-2)(X^2-3X+2) = -(X-2)^2(X-1)
\end{aligned}$$

donc les valeurs propres de $g \in End(\mathbb{R}^3)$ sont $\lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$ de multiplicité $r_2 = 1$.

2. *Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?*

On a dans les deux cas, $r_1 + r_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et $\dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2$ donc, d'après le critère de diagonalisation, f et g sont diagonalisable si et seulement si $\dim E_{\lambda_1} = 2 = r_1$.

Pour f : Déterminons

$$E_{\lambda_1=1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = (x,y,z)\} = Ker(f - Id)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_1=1} &\Leftrightarrow (A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow x - y + 2z
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1=1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y - 2z\} = \{(y-2z, y, z);\ y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(1,1,0) + z(-2,0,1);\ y,z \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,1,0), (-2,0,1)\}
\end{aligned}.$$

Comme $\{(1,1,0), (-2,0,1)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=1}$ et puisque c'est aussi un famille libre puisque $\alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, la famille $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (-2,0,1)\}$ est une base de l'espace vectoriel $E_{\lambda_1=1}$ qui est donc de dimension 2. Donc f est diagonalisable.

De plus le vecteur $v_3 = e_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ puisque d'après la matrice $A = M_{f,\mathcal{B}}$ on a $f(e_3) = 2e_3$. Comme $E_{\lambda_2=2}$ est de dimension 1, $e_3 \neq \overrightarrow{0}$ c'est une base de $E_{\lambda_2=2}$.

Comme f est diagonalisable, on a $E_{\lambda_1=1} \oplus E_{\lambda_2=2} = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base

$$A' = M_{f,\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet on a $v_1, v_2 \in E_{\lambda_1=1}$ donc $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_2$ et on a $v_3 \in E_{\lambda_2=2}$ donc $f(v_3) = 2v_3$.

Pour g : Déterminons

$$E_{\lambda_1=2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = 2(x,y,z)\} = Ker(g - 2Id)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$:

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E_{\lambda_1=2} \quad & \Leftrightarrow (B - 2Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x + 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1=2} & = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \tfrac{3}{2}y + z\} = \{(\tfrac{3}{2}y + z, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = \{y(\tfrac{3}{2}, 1, 0) + z(1,0,1);\ y, z \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(\tfrac{3}{2}, 1, 0), (1,0,1)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(3,2,0), (1,0,1)\} \end{aligned}.$$

La famille $\{(3,2,0) = v_1, (1,0,1) = v_2\}$ est génératrice de $E_{\lambda_1=2}$ et elle est aussi libre car elle est formée de deux vecteurs non colinéaires ; c'est donc une base de $E_{\lambda_1=2}$. Donc $\dim E_{\lambda_1=2} = 2 = r_1$ et l'endomorphisme g est diagonalisable. Déterminons

$$E_{\lambda_2=1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = (x,y,z)\} = Ker(g - Id)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_2=1} &\Leftrightarrow (B - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z \\ 2x - 3y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2y - 2z \\ 3y + 3z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ z = -y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = -y \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2=1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = -z\} = \{(x,x,-x);\ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,1,-1);\ x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,1,-1) = v_3\}
\end{aligned}.$$

Comme g est diagonalisable, on a $E_{\lambda_1=2} \oplus E_{\lambda_2=1} = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base

$$A' = M_{g,\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En effet on a $v_1, v_2 \in E_{\lambda_1=2}$ donc $f(v_1) = 2v_1$ et $f(v_2) = 2v_2$ et on a $v_3 \in E_{\lambda_2=1}$ donc $f(v_3) = v_3$.

Exercice 3. *Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice respective dans la base canonique les matrices A et B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B et déterminer leurs valeurs propres.*

   Le polynôme caractéristique de f est

$$\begin{aligned}
c_f(X) &= c_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 2-X \end{pmatrix} \\
&= -X \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 1-X \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -X[(1-X)(2-X) - 1] - (-2 + X + 1) + (-1 + 1 - X) \\
&= -X(X^2 - 3X + 2 - 1) + 1 - X - X = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 \\
&= (X-1)(-X^2 + 2X - 1) = -(X-1)(X^2 - 2X + 1) = -(X-1)^3
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de g est

$$\begin{aligned} c_g(X) &= c_B(X) = \det(B - XId) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)\det \begin{pmatrix} -X & -1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)[X^2 - 2X + 1] = (1-X)(X-1)^2 \\ &= -(X-1)^3 \end{aligned}$$

2. *Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?*

   Pour f : la seule valeur propre de f est $\lambda_1 = 1$ de multiplicité $r_1 = 3$. L'espace propre associé $E_{\lambda_1=1}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est

$$E_{\lambda_1=1} = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(v) = v\} = Ker(f - Id)$$

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E_{\lambda_1=1} = Ker(f - Id) \quad &\Leftrightarrow (A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + z \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1=1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0 \text{ et } x = z\} = \{(x, 0, x);\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1);\ x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0,1)\} \end{aligned} .$$

   Puisque $\{v_1 = (1,0,1)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=1}$ et aussi une famille libre ($v_1 \neq \overrightarrow{0}$), la famille $\{v_1 = (1,0,1)\}$ est une base de $E_{\lambda_1=1}$. Comme $\dim E_{\lambda_1=1} = 1 \neq 3 = r_1$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
   On aurait aussi pu dire que si f était diagonalisable, il existerait une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $P^{-1}AP = A' = Id$. Alors on aurait $A = PA'P^{-1} = PIdP^{-1} = Id$. Comme $A \neq Id$ l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

   Pour g on a aussi une seule valeur propre $\lambda_1 = 1$ de multiplicité $r_1 = 3$. On montre que $E_{\lambda_1=1} = Vect_{\mathbb{R}}\{(0,-1,1),(1,0,0)\}$ et puisque $\{(0,-1,1),(1,0,0)\}$

est une famille génératrice de cet espace et aussi une famille libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est une base et $\dim E_{\lambda_1=1} = 2$. Comme $\dim E_{\lambda_1=1} = 2 \neq 3 = r_1$, l'endomorphisme g n'est pas diagonalisable.

On pourrait aussi montrer que g n'est pas diagonalisable de la même manière que pour f.

Exercice 4. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $f(e_1+e_2)$ où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire des valeurs propres de f.*

   Puisque $M = M_{f,\mathcal{B}}$ et $e_1 + e_2 = (1,1,0) = (1,1,0)_{\mathcal{B}}$, on a

   $$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow f(1,1,0) = 0(1,1,0)$$

   Ainsi $v_1 = (1,1,0) \neq \overrightarrow{0}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$. Mais on ne connait pas la multiplicité de cette valeur propre, on peut simplement dire que $r_1 \geq 1$.

2. *Calculer la valeurs propres de f.*

   Le polynôme caractéristique de f est

   $$\begin{aligned} c_f(X) &= \det(M - XId) = \det\begin{pmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 2 & -2-X & -1 \\ -2 & 2 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} -X & -1 & 0 \\ -X & -2-X & -1 \\ 0 & 2 & 2-X \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -X & -1 & 0 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 0 & 2 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= -X\det\begin{pmatrix} -1-X & -1 \\ 2 & 2-X \end{pmatrix} = -X(X^2 - X) = -X^2(X-1) \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 0$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_2 = 1$.

3. *Est-il diagonalisable ?*

   D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $r_1 + r_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, $\dim E_{\lambda_1=0} = r_1 = 2$ et $\dim E_{\lambda_2=1} = r_2 = 1$. Déterminons

   $$E_{\lambda_1=0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = (0,0,0)\} = Ker(f)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_1=0} \quad &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1=0} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y, z = 0\} = \{(x,x,0);\ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,1,0);\ x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,1,0)\}
\end{aligned}.$$

Comme $\dim E_{\lambda_1=1} = 1 \neq 2 = r_2$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. *Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$*

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable et le diagonaliser.

Déterminons le polynôme caractéristique de f

$$\begin{aligned}
c_f(X) \quad &= c_A(X) = \det(A - XId) = \det \begin{pmatrix} 11-X & -5 & 5 \\ -5 & 3-X & -3 \\ 5 & -3 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 11-X & -5 & 0 \\ -5 & 3-X & -X \\ 5 & -3 & -X \end{pmatrix} (C'_3 = C_3 + C_2) \\
&= \det \begin{pmatrix} 11-X & -5 & 0 \\ -5 & 3-X & -X \\ 10 & -6+X & 0 \end{pmatrix} (L'_3 = L_3 - L_2) \\
&= X \det \begin{pmatrix} 11-X & -5 \\ 10 & -6+X \end{pmatrix} = X(-66 + 17X - X^2 + 50) = X(-X^2 + 17X - 16) \\
&= -X(X^2 - 17X + 16) = -X(X-1)(X-16)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{R}$ de $c_f(X)$ donc les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 0$ de multilplicité $r_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ de multilplicité $r_2 = 1$ et $\lambda_3 = 16$ de multilplicité $r_3 = 1$,

On a $r_1 + r_2 + r_3 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. De plus, pour tout $i \in \{1, 2, 3]$, r_i, on a $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq r_i = 1$ ce qui implique que $\dim E_{\lambda_i} = 1 = r_i$. D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme f est diagonalisable. Il existera donc une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M' = M_{f,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ telle que $E_{\lambda_i} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_i\}$

Si on veut donner explicitement une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP = M'$ il faut déterminer des bases des espaces propres.

Exercice 6. *Soit A une matrice carrée. Elle est dite nilpotente s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.*

1. *Donner un exemple d'une matrice non nulle nilpotente d'ordre 2.*

   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A n'est pas la matrice nulle.

2. *Déterminer les valeurs propres de A (on déterminera au préalable les valeurs propres de A^n en fonction de celles de A).*

   Le polynôme caractéristique de A est $c_A(X) = \det(A - XId) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{pmatrix} = X^2$. La matrice A a donc pour valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité $r = 2$.

3. *Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente.*

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre k c'est-à-dire que $A^k = 0_n$ et $A^{k-1} \neq 0_n$. Soit $c_A(X)$ le polynôme caractéristique de A. C'est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n donc il a n racines complexes distinctes ou confondues. Le polynôme caractéristique de $A^k = 0_n$ est $c_{A^k} = det(0_n - XId) = det(-XId) = (-1)^n X^n$ donc $\lambda = 0$ est valeur propre de A^k de multiplicité $r = n$. Soit λ_i une valeur propre de A, et $V \neq 0_{n,1}$ un vecteur propre de A associé à la λ_i. Alors $AV = \lambda V \Rightarrow A^2V = A(\lambda V) = \lambda AV = \lambda^2 V$. On montre par récurrence sur p que $\mathcal{P}_p : \{\, A^p = \lambda^p V\}$.

   (a) Initialisation : pour $p = 1$ c'est vrai.

   (b) Hérédité : Soit $p \geq 1$. Supposons que $A^pV = \lambda^p V$. Alors $A^{p+1}V = A(A^p(V)) = A(\lambda^p V) = \lambda^p AV = \lambda^{p+1}V$. La propriété est donc héréditaire.

   (c) Conclusion : $\forall p \geq 1, A^pV = \lambda^p V$.

   C'est donc vrai en particulier pour $p = k$ donc $A^kV = \lambda^k V$. Comme $V \neq 0_{n,1}$ on obtient que λ^k est valeur propre de A^k. Comme toute les valeurs propres de A^k sont nulles, on a $\lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Ainsi la seule valeur propre de A est $\lambda = 0$ qui est donc de multiplicité $r = n$.

Exercice 7. *On désigne par f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base* *canonique est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que le polynôme caractéristique de f est*

$$c_f(X) = -(X+1)^3.$$

2. *Montrer sans calcul que f n'est pas diagonalisable. Déterminer le sous espace propre de f.*

Exercice 8. *Pour quelles valeurs de a la matrice réelle*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & (1+a) \end{pmatrix}.$$

est diagonalisable ? Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n.

Exercice 9. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer $(A - 2I_3)^2$ et en déduire A^2.*