Licence 2. Physique-Chimie- Renfort - CPB2 FST -UHA

Module : ALGEBRE LINEAIRE et APPLICATIONS

Contrôle Final. Décembre 2019

Durée 2 heures

Calculatrices interdites

ELEMENTS DE REPONSES

Questions de cours.

(1) Soit f un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ de valeurs propres λ_1 de multiplicité r_1, λ_2 de multiplicité r_2, $\cdots$, λ_k de multiplicité r_k. Donner le critère de diagonalisation de cet endomorphisme f.

(2) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de $Exp(A)$.

Exercice 1. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

(1) *Calculer le polynôme caractéristique de f.*

$$c_f(X) = det(A - XId) = (X-1)[(2-X)(-2-X)+20] = (X-1)(X^2+16)$$

(en développant par rapport à la deuxième ligne)

(2) *En déduire les valeurs propres de f.*

Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{R}$ de $c_f(X)$ donc $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 1$ est la seule valeur propre de A car X^2+16 a pour discriminant $\Delta = -4 \times 16 < 0$ donc n'a pas de racine réelle.

(3) *L'endomorphisme f est-il diagonalisable (on justifiera clairement la réponse).*

On a $\sum_{i=1^1} r_i = r_1 = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc la première condition du critère de diagonalisation n'est pas vérifiée et l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

(4) *On considère l'endomorphisme f_1 de $\mathbb{C}^3$ de matrice B dans la base canonique. Est-ce que $f_1 \in End(\mathbb{C}^3)$ est diagonalisable ?*

Le polynôme caractéristique de f_1 est

$$c_{f_1}(X) = (X-1)(X-4i)(X+4i).$$

Les valeurs propres de f_1 sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $c_{f_1}(X)$ donc $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 1$, $\lambda_2 = 4i$ est valeur propre de f de multiplicité $r_2 = 1$ et $\lambda_3 = -4i$ est valeur propre de f de multiplicité $r_3 = 1$. On a $\sum_{i=1}^{3} r_i = 1+1+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. De plus pour tout $i \in \{1,2,3\}$ on a $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq r_i = 1$ ce qui entraîne que $\dim E_{\lambda_i} = 1 = r_i$. D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme f_1 est diagonalisable.

Remarque : s'il fallait diagonaliser la matrice A : on sait que $\dim E_{\lambda_i} = 1$ donc il existe un vecteur $v_i \neq \overrightarrow{0}$ tel que $E_{\lambda_i} = Vect_{\mathbb{C}}\{v_i\}$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (c'est bien une base car f_1 est diagonalisable donc les espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et une concaténation de bases des E_{λ_i} donne une base de $\mathbb{R}^3$). On a

$$P^{-1}AP = A' = Mat_{f_1,\{v_1,v_2,v_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & -4i \end{pmatrix}$$

car $v_i \in E_{\lambda_i}$ donc $f_1(v_i) = \lambda_i v_i$.

Exercice 2. *On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ de matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

(1) *Calculer les valeurs propres de g et pour chacune des valeurs propres les espaces propres associés.*

Le polynôme caractéristique de g est

$$\begin{aligned} c_g(X) &= \det(B - XId) = \det \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 2 & -2-X & -1 \\ -2 & 2 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -X & -1 & 0 \\ -X & -2-X & -1 \\ 0 & 2 & 2-X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -X & -1 & 0 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 0 & 2 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= -X \det \begin{pmatrix} -1-X & -1 \\ 2 & 2-X \end{pmatrix} = -X(X^2 - X) = -X^2(X-1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de g sont $\lambda_1 = 0$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_2 = 1$.

Déterminons

$$E_{\lambda_1 = 0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; g(x,y,z) = (0,0,0)\} = Ker(g)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in E_{\lambda_1=0} &\Leftrightarrow B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\2x-2y-z=0\\-2x+2y+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y\\z=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_{\lambda_1=0}&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y,z=0\}=\{(x,x,0);\ x\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(1,1,0);\ x\in\mathbb{R}\}=Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,1,0)}_{v_1}\}\end{aligned}.$$

La famille $\{v_1\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=0}$ et aussi une famille libre puisque $v_1\neq\overrightarrow{0}$ donc c'est une base de $E_{\lambda_1=0}$ et $\dim E_{\lambda_1=0}=1$.

Déterminons

$$E_{\lambda_2=1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; g(x,y,z)=(x,y,z)\}=Ker(g-Id)$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2=1$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in E_{\lambda_2=1} &\Leftrightarrow (B-Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&-3&-1\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-y=0\\2x-3y-z=0\\-2x+2y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\z=2x\end{array}\right.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_{\lambda_1=0}&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ y=0,z=2x\}=\{(x,0,2x);\ x\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(1,0,2);\ x\in\mathbb{R}\}=Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}\}.\end{aligned}.$$

La famille $\{v_2\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_2=1}$ et aussi une famille libre puisque $v_2\neq\overrightarrow{0}$ donc c'est une base de $E_{\lambda_2=1}$ et $\dim E_{\lambda_2=1}=1$. Remarquons qu'on pouvait sans calcul montrer que cet espace était de dimension 1.

(2) *L'endomorphisme est-il diagonalisable ? Justifier avec précision.* D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme g est diagonalisable si et seulement si $r_1+r_2=3=\dim\mathbb{R}^3$, $\dim E_{\lambda_1=0}=r_1=2$ et $\dim E_{\lambda_2=1}=r_2=1$. Comme $\dim E_{\lambda_1=0}=1\neq 2=r_1$, l'endomorphisme g n'est pas diagonalisable.

(3) *On considère l'endomorphisme g_1 de $\mathbb{C}^3$ de matrice B dans la base canonique. Est-ce que $g_1\in End(\mathbb{C}^3)$ est diagonalisable ?*

L'endomorphisme g_1 n'est pas non plus diagonalisable : on a

$$c_{g_1}(X)=c_g(X=-X^2(X-1),$$

les valeurs propres de g_1 sont $\lambda_1=0$ de multiplicité $r_1=2$ et $\lambda_2=1$ de multiplicité $r_2=1$ donc $r_1+r_2=3=\dim\mathbb{C}^3$ mais $E_{\lambda_1=0}==Vect_{\mathbb{C}}\{(1,1,0)\}$ et La famille $\{v_1\}$ est une base de $E_{\lambda_1=0}$ et $\dim E_{\lambda_1=0}=1\neq 2=r_1$ donc, d'après le critère de diagonalisation, g_1 n'est pas diagonalisable.

Comme $\dim E_{\lambda_1=1} = 1 \neq 2 = r_2$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

dans la base canonique.

(1) *Déterminer le polynôme caractéristique de f.* Après calculs on obtient

$$c_f(X) = -(X-2)^2(X-1)$$

(2) *Montrer que f est diagonalisable, puis déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ (on demande de déterminer explicitement P et P^{-1} ainsi que de vérifier que l'on obtient bien A par la formule indiquée). Que représente la matrice D ?*

Les valeurs propres sont les racines dans $\mathbb{R}$ (f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) du polynôme caractéristique donc $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_2 = 1$.

D'après le critère de diagonalisation,

l'endomorphisme f est diagonalisable $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2} r_i = \dim \mathbb{R}^3, \\ \dim E_{\lambda_1} = r_1 \text{ et } \dim E_{\lambda_2} = r_2. \end{array} \right.$ On calcule E_{λ_1} l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E_{\lambda_1} \quad &\Leftrightarrow (A - \lambda_1 Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \ -2x + 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

C'est l'équation d'un plan vectoriel donc de dimension 2. Une base est donnée par les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (3,2,0)$ puisque $-2\times 1 + 3\times 0 + 2\times 1 = 0$ dans $v_1 \in E_{\lambda_1}$ et $-2\times 3 + 3\times 2 = 0$ dans $v_2 \in E_{\lambda_1}$; de plus $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre car ces deux vecteurs ne sont colinéaires. On a donc $\dim E_{\lambda_1} = 2 = r_1$.

Pour l'espace vectoriel associé à E_{λ_2}, on a $1 \leq \dim E_{\lambda_2} \leq r_2 = 1$ ce qui entraîne que $\dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2$.

Le critère de diagonalisation est donc vérifié et f est diagonalisable.

(3) *Résoudre le système différentiel linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{array} \right.$$

ayant pour conditions initiales $x(0) = 2, y(0) = -1$ et $z(0) = 3$.

Ce système est équivalent au système matriciel

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

La solution est

$$X(t) = Exp((t-0)A)X_0 = Exp(tA)X_0 = PExp(tA')P^{-1}X_0.$$

On a

$$Exp(tA') =$$

Exercice 4. *On considère la matrice*

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Calculer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

Pour tout $k \geq 3, N^k = 0$.

(2) *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

En calculant le polynôme caractéristique, on trouve $c_B(X) = -X^3$ donc $\lambda = 0$ est valeur propre de multiplicité $r = 3$. On montre que B n'est pas diagonalisable, soit en calculant l"espace propre et démontrant qu'il est dimension < 3, soit par une démonstrations par l'absurde : si B était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que

$$B' = P^{-1}BP$$

et telle que B' soit diagonale et on aurait $B' = 0$ (matrice nulle) car B' est diagonale avec la valeur 0 sur la diagonale. Alors

$$B = PB'P^{-1} = P \times 0 \times P^{-1} = 0.$$

Or $B \neq 0$ donc B n'est pas diagoanlisable.

(3) *Déterminer Exp(N).*

On a

$$Exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = Id + N + \frac{1}{2} N^2$$

puisque pour tous $k \geq 3, N^k = 0$. Il suffit de calculer cette matrice.