Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L2 Physique-Chimie

Mathématiques: SERIES ET INTEGRALES

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 5

Intégrales généralisées

1. Rappel sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment fermé

1.1. Primitives d'une fonction continue.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle primitive de f sur l'intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que*

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in I$

Il est clair que si une primitive F de f existe, elle n'est pas unique en tant que primitive. Toute autre primitive G s'écrit

$$G(x) = F(x) + C$$

où C est une constante. Le résultat fondamental de la théorie de l'intégration vue en première année est le suivant:

Proposition 1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

Remarques.

(1) L'hypothèse I est un intervalle lest indispensable pour affirmer que deux primitives ne diffèrent que par une constante. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

définie sur $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Elle admet comme primitive la fonction

$$F(x) = \ln |x|$$

sur D. Considérons à présent la fonction

$$G(x) = \begin{cases} \ln(-2x) \text{ si } x < 0, \\ F(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction G est définie sur D et dérivable sur D. Elle admet pour dérivée la fonction

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0, \\ F'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi G est aussi une primitive de f sur D. Mais on a

$$F(x) - G(x) = \begin{cases} \ln(-x|) - \ln(-2x) = -\ln 2 \text{ si } x < 0, \\ 0 \ \ \text{si} x > 0. \end{cases}$$

et $G(x) - F(x)$ n'est pas une fonction constante sur D en entier.

(2) Il existe des fonctions non continues sur un intervalle qui admettent également des primitives. par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x2} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue sur $I = \mathbb{R}$. Pourtant la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est continue dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et $F'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Comme il est difficile de caractériser l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle et qui admettent une primitive, on restreint cette classe sa sous classe des fonctions continues.

1.2. **L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé** $[a, b]$**.** Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Elle admet donc une primitive F sur I. Soit a, b deux points de I. L'intervalle fermé $[a, b]$ est contenu dans I. Alors la différence

$$F(b) - F(a)$$

ne dépend pas du choix de la primitive F choisie. En effet, si G est une autre primitive de f sur I, on a $G(x) = F(x) + c$ où c est une constante. Il s'en suit immédiatement que $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Définition 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a, b \in I$. On appelle intérgrale de f sur le l'intervalle fermé $[a, b]$ le nombre*

$$F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I. On note cette intégrale par

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Nous allons rappeler rapidement les propriétés essentielles de cette intégrale. Leurs démonstra--tions ainsi que des techniques de calcul ont été présentées dans le cours de L1. Dans les énoncés qui suivent, f est une fonction continue sur l'intervalle I et $[a, b] \subset I$.

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

(3) Relation de Chasles. Soient $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

(4) Supposons de plus que $f(x) \geq 0$ sur I et $a \leq b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

De plus, si $a < b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

(5) Si f et g sont deux fonctions continues sur I et α, β deux constantes réelles, alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Théorème 1. Théorème fondamental de l'analyse. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur I et vérifie

$$F'(x) = f(x) \text{ et } F(a) = 0.$$

On aura donc, si f est une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' est continue sur I

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a).$$

Théorème 2. Théorème fondamental de la moyenne. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et soit $[a, b] \subset I$. Il existe un point $z \in]a, b[$ (l'intervalle ouvert), tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b - a).$$

Le nombre

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

est appelé la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

1.3. **Intégrales et calcul d'aires.** Nous supposerons dans cette partie que la fonction f est continue sur l'intervalle I et de plus que

$$f(x) \geq 0$$

pour tout $x \in I$. Soit $a, b \in I, a < b$. On note par $\mathcal{A}(a, b)$ l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $f(x)$ et les deux axes $x = a$ et $x = b$. Sous les hypothèse précédentes, on a

$$\mathcal{A}(a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ce résultat n'est pas très facile à établir. On pourra à titre d'exercice le vérifier dans les cas connus:

- $f(x)$ est constante. Dans ce cas $\mathcal{A}(a, b)$ est l'aire d'un rectangle.
- $f(x)$ est une fonction affine. Dans ce cas $\mathcal{A}(a, b)$ est l'aire d'un trapèze.
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ avec $x \in [-1, 1]$. Dans ce cas $\mathcal{A}(a, b)$ est l'aire d'un demi-cercle.

Sinon, voici une esquisse de la démonstration, loin d'être la preuve préxcise, mais qui donne néanmoins une idée de son coteau et de ses difficultés.

Pour calculer $\mathcal{A}(a, b)$ sous les hypothèsse précisdes plus haut, nous allons remplacer l'aire définie par la fonction $f(x)$ par une partition en bandelettes "trapégoïdales que l'on approximera par des bandelettes rectangulaires. L'aire que nous devons calculer sera alors approximée par la sommes des aires des bandelettes rectangulaires. Il restera alors à faire le lien avec l'intégrale de f sur $[a, b]$. Considérons donc une subdivision du segment $[a, b]$ en n segments égaux:

$$a = a_0 < a_1 < \cdots a_{n-1} < a_n = b$$

avec

$$a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \ i = 1, \cdots n.$$

Ainsi a_i est le point sur Ox d'abscisse

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

La i-ème bandelette est donc le rectangle de base $[a_{i-1}, a_i]$ et de hauteur $f(a_i)$. La somme des aires rectangulaires est donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}).$$

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors*
$$\mathcal{A}(a,b) = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Cette approche du calcull d'aire est en fait la base de la théorie de l'intégrale de Riemann. Les sommes S_n sont appeldés les sommes de Darboux et l'intégrale de Riemann d'une fonction sur l'intervalle fermée $[a,b]$ est la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite S_n. Ainsi, lorsque f est continue et positive, l'intégrale de Riemann est égale à l'aire $\mathcal{A}(a,b)$. Nous ne dénvelopperons pas, autrement que dans ce cas particulier la théorie de l'intégrale de Riemann. Disons, toutefois, qu'il existe des fonctions qui admettent des intégrales de Riemann et pas de primitives, des fonctions qui admettent des primitives mais dont l'intgrale de Riemann n'existe pas. Mais, on a le résultat fondamental suivant :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive, une intégrale de Riemann et de plus $\int_a^b f(x)dx =$ l'intégrale de riemann de f sur $[a,b]$.

On en déduit:

Théorème 4. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors*
$$\mathcal{A}(a,b) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2.1. Définition.

Définition 3. *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. L'intégrale généralisée de f sur $[a,+\infty[$, notée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)dx.$$
Lorsque cette limite existe, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Commentaires.

(1) La fonction f est supposée continue sur $[a,+\infty[$. Ainsi pour tout $X > a$, la fonction f est continue sur l'intervalle fermée $[a,X]$ et admet donc une primitive sur cet intervalle. Ainsi $\int_a^X f(x)dx$ est une fonction $F(X)$ de X bien définie. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est donc par définition la limite, lorsque X tend vers $+\infty$ de $F(X)$. Cette limite existe ou n'existe pas. Nous étudierons cette convergence dans la suite.

(2) Nous avons supposée f continue sur $[a, +\infty[$. Cette hypothèse peut être raffinée en supposant par exemple que f admet une primitive sur $[a, X]$ pour rout $X > a$.

Exemples.

(1) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est définie et continue sur $[1, +\infty[$. Alors

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} (\ln X - \ln 1) = +\infty$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

(2) Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Elle est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{X\to+\infty} (\arctan(X) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

(3) Soit $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Elle est définie et continue sur $[2, +\infty[$. Alors

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{X\to+\infty} (\frac{-1}{x-1} + 1) = 1.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx$ converge et vaut 1.

2.2. **Les intégrales généralisées** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$**.** Soit α une constante réelle positive. rappelons que $x^\alpha = e^{x \ln \alpha}$. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Nous allons déterminer, en fonction de α, la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$. Soit $X > 1$. Alors

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln X \quad \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit

Proposition 2. *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$

(1) *converge si* $\alpha > 1$,

(2) *diverge si* $\alpha \leq 1$.

2.3. **Critères de convergence lorsque $f \geq 0$.** Supposons que f soit continue sur $[a, +\infty[$ et positive sur cet intervalle. Si F est une primitive de f , comme $F'(x) = f(x)$, alors F est une fonction croissante. Ainsi, dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si et seulement si $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx = +\infty$. Sinon, l'intégrale généralisée converge.

Théorème 5. Critère de comparaison *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$. Soit g une fonction confine sur $[a, +\infty[$ telle que*

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, +\infty[.$$

Alors

(1) *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*
(2) *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.*

Démonstration. (1) Comme $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \geq a$, on a

$$\int_a^X f(x)dx \leq \int_a^X g(x)dx$$

pour tout $X > a$. Supposons que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge. Comme la primitive $\displaystyle\int_a^X g(x)dx$ est une fonction croissante, sa dérivée $g(x)$ ´tant positive, elle est majorée par sa limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$. On en déduit

$$\int_a^X f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

pour tout $X > a$. Ainsi la fonction $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(x)dx$ est croissante et majorée par le nombre $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$. Ainsi $\lim_{X \to +\infty} F(X)$ existe et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.

(2) Supposons à présent que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge. Comme $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Or

$$\int_a^X g(x)dx \geq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

pour tout $X > a$. On en déduit

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \geq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

et donc
$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty.$$
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est donc divergente.

Théorème 6. Critère d'équivalence *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, $a \geq 1$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$. Supposons qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ telle que*
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = c \neq 0.$$
Alors

(1) *Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

(2) *Si $\alpha \leq 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.*

Démonstration. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = c \neq 0$,, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour x assez grand, on ait
$$c - \epsilon < x^\alpha f(x) < c + \epsilon.$$
Supposons $\alpha > 1$. Alors $x^\alpha f(x) < c + \epsilon$ implique
$$f(x) < \frac{c+\epsilon}{x^\alpha}$$
et comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{c+\epsilon}{x^\alpha}dx$ converge, le critère précédent assure la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
Si $\alpha \leq 1$ alors $x^\alpha f(x) > c - \epsilon$ implique
$$f(x) > \frac{c-\epsilon}{x^\alpha}$$
et comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{c-\epsilon}{x^\alpha}dx$ diverge, le critère précédent assure la divergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Exemples.

(1) Soit l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln x dx$. Comme
$$x^{\frac{1}{2}} \ln x \to 0$$
lorsque $x \to +\infty$. Ainsi, lorsque x est assez grand
$$x^{\frac{1}{2}} \ln x < \epsilon$$
et donc
$$\ln x < \frac{\epsilon}{x^{\frac{1}{2}}}.$$
Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ diverge. Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln x dx$ est divergente.

(2) Soit l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^{\frac{1}{2}}}dx$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{x}$ tend vers 0 et donc $\cos\displaystyle\frac{1}{x}$ est équivalent à $1-\displaystyle\frac{\frac{1}{x^2}}{2}=1-\frac{1}{2x^2}$. On en déduit que $\ln(\cos\displaystyle\frac{1}{x})$ est équivalent à $-\displaystyle\frac{1}{2x^2}$. Ainsi $\displaystyle\frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ est équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$ à $-\displaystyle\frac{1}{2x^2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}}$. Ici $\alpha=\frac{5}{2}$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}}dx$ converge. Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ est convergente.

2.4. **Cas où f n'a pas un signe constant.**

Définition 4. *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ converge.*

Pour dḿontrer la convergence absolue nous pouvons donc utilser les critères de convergence relatif aux fonctions positives. L'intérêt de la notion de convergence absolue est dans le théorème suivant:

Théorème 7. *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument, alors elle converge.*

Démonstration. Elle repose sur le crutère de Cauchy que nous rappelons:

Soit $f(x)$ une fonction défnie sur $[a,+\infty[$. Alors elle admet une limite lorsque $x\to+\infty$ si et seulement si

$$\forall\epsilon>0,\ \exists x_0,\ \forall x,x'>x_0\to|F(x)-F(x')|<\epsilon.$$

Posons $F(X)=\displaystyle\int_a^X f(x)dx$. Soit $X, X4>x_0$. On a alors

$$|F(X)-F(X')|=|\int_{X'}^X f(x)dx\leq\int_{X'}^X|f(x)|dx.$$

Comme, par hypothèse $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ converge, alors $\int_{X'}^X|f(x)|dx<\epsilon$. On en déduit

$$|F(X)-F(X')|<\epsilon$$

et donc, d'après le critère de Cauchy, $F(X)$ a une limite quand X tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Remarque. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dont le signe n'est pas constant. Il se peut que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge sans qu'elle soit absolument convergente. Pour préciser cet état, on dit parfois que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est semi-convergente.

Théorème 8. Critère d'Abel. *Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que*
(1) *f est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$*
(2) *il existe une constante M strictement positive telle que*
$$|\int_a^X g(x)dx| \leq M$$
pour tout $X \geq a$.
Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente.

Ce résultat est analogue à celui énoncé pour les séries numériques réelles à termes quelconques.

Exemple: les intégrales de Fresnel. Considérons
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$
La fonction $\dfrac{1}{x}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. On a aussi
$$|\int_1^X \sin x dx| = | - \cos(X) + \cos(1)| \leq 2$$
pour tout $X \geq 1$. Ainsi d'après le critère d'Abel
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$
est convergente. A titre d'exercice on peut montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

3. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

3.1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$..

Soit f une fonction continue sur $]-\infty, a]$. L'intégrale généralisée de f sur $]-\infty, a]$ est définie par
$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{X\to-\infty} \int_X^a f(x)dx.$$

Considérons la fonction $g(x) = f(-x)$. Elle est définie et continue sur $[-a, +\infty[$. En faisant le changement de variables $t = -x$, on obtient

$$\int_X^a f(x)dx = -\int_{-X}^{-a} g(t)dt = \int_{-a}^{T} f(t)dt$$

avec $T = -X$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{X\to-\infty}\int_X^a f(x)dx = \lim_{T\to+\infty}\int_{-a}^T g(t)dt.$$

On est donc ramené au cas précdent.

3.2. **L'intégrale généralisée** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$**.**

Définition 5. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. L'intégrale généralisée de f sur $]-\infty, +\infty[$, notée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)dx + \lim_{T\to-\infty}\int_T^a f(x)dx.$$

quel que soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque ces deux limites existent, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge. Sinon, si l'un des deux limites n'existe pas, on dit qu'elle diverge.

Commentaires

(1) Lorsque $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

et la valeur ne dépend pas du point $a \in \mathbb{R}$ choisi. En effet, si $b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.\end{aligned}.$$

(2) Si l'un des ceux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ ou $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est divergente. On étudie donc séparemment chacune des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

(3) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ peut être de nature différente de la limite suivante:

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x)dx.$$

En effet cette dernière peut converger alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverge. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive $F(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$. Comme

$$\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty,$$

l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{x}{1+x^2}dx$ diverge et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$$

diverge. Par contre

$$\int_{-X}^{X} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+X^2}{1+X^2} = 0$$

et donc

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} \frac{x}{1+x^2}dx = 0.$$

Lorsque l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverge, on appelle parfois valeur principale de Cauchy de cette intégrale la limite quand elle existe $\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x)dx$.

4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, f étant continue sur $[a,b[$ ou sur $]a,b]$.

On suppose dans tout ce paragraphe que la fonction f est définie et continue sur l'internalle semi-ouvert $[a,b]$. Ainsi f admet une primotive sur tout intervalle fermé $[a,c]\subset[a,b[$. Comme f n'est pas définie en b, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ n'est pas définie.

4.1. **Définition.**

Définition 6. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$. L'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$, notée $\int_a^b f(x)dx$ est*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx+$$

avec $\varepsilon > 0$. Lorsque cette limite existe, on dit que $\int_a^{+b} f(x)dx$ converge. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Définition 7. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a,b]$. L'intégrale généralisée de f sur $]a,b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$ est*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx+$$

avec $\varepsilon > 0$. Lorsque cette limite existe, on dit que $\int_a^{+b} f(x)dx$ converge. Sinon, on dit qu'elle diverge.

On prendra garde au fait que le symbole $\int_a^b f(x)dx$ représente des notions bien différentes que l'on doit distinguer à partir des hypothèsse données:

(1) Si f est continue sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale définie sur $[a,b]$.
(2) Si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale généralisée sur $[a,b[$.
(3) Si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale généralisée sur $]a,b]$.

Exemples

(1) Soit l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$. Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx$$

avec $\varepsilon > 0$. Or

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \ln 1 - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = +\infty.$$

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ est divergente.

(2) Soit l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ est continue sur $[0, 2[$. Donc

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$$

avec $\varepsilon > 0$. Or

$$\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = -2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = 2\sqrt{2}.$$

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ est convergente.

(3) **Exemple fondamental** Soit f la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette fonction est définie et continue pour tout $x < b$. Soit $a < b$. Etudions l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$. Soit c tel que $a < c < b$. Comme f est continue sur $[a, c]$, elle admet une primitive sur cet intervalle fermé. Calculons l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$. On a

$$\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} -\dfrac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{(b-a)^{\alpha-1}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1, \\ \ln\dfrac{b-a}{b-c} \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Faisons tendre c vers b, sachant que $c < b$. On a

$$\lim_{c\to b} \ln\frac{b-a}{b-c} = -\infty.$$

De même

$$\lim_{c\to b} \frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ si } \ \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \ \alpha > 1. \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Récapitulons les résultats de ce dernier exemple.

Proposition 3. *L'intégrale généralisée*
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$$
converge si $0<\alpha<1$ *et diverge si* $\alpha \geq 1$.

Théorème 9. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b[$ *(respectivement* $]a,b]$*. Si* f *est prolongeable par continuité au point* $x=b$ *(respectivement au point* $x=a$*), alors l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

Démonstration. Rappelons que f qui est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ est prolongeable par continuité au point $x=b$ si $\lim_{x\to b, x<b} f(x)$ existe. Dans ce cas, la fonction $g(x)$ définie par
$$g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\in[a,b[\\ \displaystyle\lim_{x\to b,x<b} f(x) \text{ si } x=b \end{cases}$$
est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et est appelée le prolongement par continuité de f au point $x=b$. On a alors
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$
et le second membre est l'intégrale définie de la fonction continue $g(x)$ sur $[a,b]$.

Exemple. Considérons l'intégrale généralisée
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$$
La fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,1]$. Or
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$
Ainsi $\dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité au point $x=0$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ converge.

4.2. Critères de convergence lorsque $f\geq 0$.

Supposons que f soit continue sur $[a,b[$ et positive sur cet intervalle semi-ouvert.

Théorème 10. Critère de comparaison *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in a[a,b[$. Soit g une fonction confine sur $[a,+b[$ telle que*

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a,b[.$$

Alors

(1) *Si* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

(2) *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *diverge.*

Démonstration. (1) En effet la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est définie, continue sur $[a,b[$ et dérivable sur cet intervalle. La dérivée est égale à $f(x)$. Elle est positive. Donc la fonction $F(x)$ est croissante sur $[a,b[$. Elle est majorée par $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$. Donc $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, comme f est positive, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$. Comme $g \leq f$ sur $[a,b[$, on aura

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \geq \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente.

Définition 8. *Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$. On dit qu'elles sont équivalentes au voisinage de b, et on écrit $f \sim_b g$ si la limite suivante $\lim\limits_{x\to b,\ x<b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe et est non nulle.*

On a bien entendu, une définition équivalente pour des fonctions positives et continues sur $]a,b]$:

$$f(x) \sim_a g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0.$$

Théorème 11. Critère d'équivalence. *Soient f et g deux fonctions continues, positives sur $[a,b[$ et équivalentes au voisinage de b. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.*

Exemple. Considérons l' intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

La fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0,1[$. Au voisinage de $x=1$, elle est équivalente à la fonction $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. D'après la Proposition 3, l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ converge. On en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge.

4.3. Critères de convergence lorsque f ne garde pas un signe constant.

Définition 9. *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.*

On a alors le résultat suivant:

Théorème 12. *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$.Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle présentée dans le paragraphe précédent et repose sur le lemme de Cauchy.

5. Changement de variable et intégration par parties dans les intégrales généralisées

5.1. Changement de variable.

Les changements de variable dans une intégrale généralisée doit être manié avec une extrème prudence. Il conviendra de le faire, en utilisant la définition de l'ntégrale généralisée, dans une intégrale définie et ensuite de passer à la limite.

Exemples.

(1) Considérons l'ntégrale généralisée

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx.$$

Posons

$$F(X)=\int_X^1 \sin\frac{1}{x}dx,\ 0<X<1.$$

Considérons le changement de variables dans $F(X)$ donné par $t=\frac{1}{x}$. On a $dt=\frac{-1}{x^2}dx$ et donc

$$F(X)=-\int_{\frac{1}{X}}^1 \frac{\sin t}{t^2}dt.$$

Si on pose $U = \dfrac{1}{X}$, on obtient

$$G(U) = F(X) = \int_1^U \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Lorsque X tend vers 0^+, U tend vers $+\infty$. Or

$$|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge.

(2) Considérons l'ntégrale généralisée

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx.$$

Posons $t = \ln x$. Alors $dt = \dfrac{dx}{x}$. Ainsi, pour tout $X \in [e, +\infty]$, on a

$$F(X) = \int_e^X \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \int_1^{\ln X} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Quand X tend vers $+\infty$, $\ln \dfrac{1}{X}$ aussi et l'intégrale généralisée

$$int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi l'ntégrale généralisée

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

5.2. **Intégration par parties.** Ici aussi, il faut utiliser cette technique avec beaucoup de prudence. Il est préférable de l'appliquer aux intégrales définies obtenues à partir de la définition de l'intégrale généralisée.

Exemples.

(1) Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

On peut montrer facilement qu'elle converge absolument, donc converge. Utiliusons ce résultat et une intégration par parties pour déterminer la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

. Posons

$$F(X) = \int_1^X \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \; X > 0.$$

Alors
$$F(X)=\int_1^X \sin^2 x \; d(-\frac{1}{x}).$$
Intégrons par parties:
$$F(X)=-\frac{\sin^2 X}{X}+\sin^2 1+\int_1^X \frac{\sin 2x}{x}dx.$$
Quand X tend vers $+\infty$, $\dfrac{\sin^2 X}{X}$ tend vers 0. Ainsi
$$int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\lim_{X\to+\infty}F(X)=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin 2x}{x}dx.$$
On en déduit que
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$
converge et donc aussi
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

(2) Considérons l'intégrale généralisée
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx.$$
Posons
$$F(X)=\int_X^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx, \quad 0<X<1.$$
Une intégration par partie donne
$$F(x)=-2(\sin 1-\frac{\sin X}{\sqrt{X}})+2\int_X^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$
Si X tend vers 0, on obtient
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx=-2\sin 1+2\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$
Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ converge, on en dénduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ converge aussi. Mais, l'intégration par parties aurait pu être faite ainsi:
$$F(x)=-\cos 1+\frac{\cos X}{X^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\int_X^1 \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}dx.$$
Mais si X tend vers 0, le membre de droite tend vers une forme indéterminée. Cette intégration par partie ne donne donc rien.

Remarque Attention si lors de calculs certainnes intégrales génŕalisées apparaissent. Cela peut induire des erreurs. Par exemple, soit l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}dx.$$

La fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $[0,1]$. Cette intégrale est bien définie. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}.$$

Mais si nous posons

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\int_1^{+\infty}\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$$

la dernière égalité n'a pas de sens car elle est la somme de deux intégrales divergentes.

EXERCICES

Exercice 1 Déterminer la nature des intégrales suivantes et, en cas de convergence, calculer sa valeur

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^2}dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx, \quad \int_{-\infty}^1 e^x dx.$$

Exercice 2 Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-1}dx$$

converge. Montrer que

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Peut-on en déduire que $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x+1}dx$?

Exercice 3 Soit α un nombre positif. Pour quelles valeurs de α l'intégrale généralisée

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$$

est absolument convergenet?

Exercice 4 On considère dans le plan Oxy les points A_n et B_b de l'axe Ox d'abscisses $n - \dfrac{1}{n^2}$ et $n + \dfrac{1}{n^2}$ et les points C_n d'abscisse n et d'ordonnée 1. On considère la fonction $f(x)$ définie pour $X \geq 0$ ayant pour graphe la ligne brisée $OA_1C_1B_1A_2C_2B_2 \cdots A_nC_nB_n \cdots$

(1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est bornée.
(2) A-t-elle une limite lorsque $x \to +\infty$?
(3) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Exercice 5 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

est convergente.

Exercice 6 Déterminer la nature des intégralse généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx, \quad \int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx.$$

Exercice 7 Déterminer la nature des intégralse généralisées suivantes

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx.$$