**Université de Haute Alsace-Mulhouse** **Année universitaire 2020/2021**
**L2 Physique Chimie - Renfort - CPB2**

**ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS**

**TD3**

## Exercice 1

On considère $f \in End(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de $f$.

$$c_f(X) = c_A(X) = det(A - XId) = -(X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de $f$ sont les racines réelles du polynôme caractéristique donc

- $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de $f$ de multiplicité $r_1 = 2$ et
- $\lambda_2 = -1$ est valeur propre de $f$ de multiplicité $r_2 = 1$.

2. Déterminer les espaces propres de $f$

L'espace propre associé à $\lambda_1 = 1$ est $E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 Id) = Ker(f - Id)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_1} = Ker(f - Id) \quad & \Leftrightarrow (A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 \\ 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow -4x + 6y + 4z = 0 \\
& \Leftrightarrow -2x + 3y + 2z = 0
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -2x + 3y + 2z = 0\} \text{ (c'est un plan vectoriel de } \mathbb{R}^3) \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \tfrac{3}{2}y + z\} \\
&= \{(\tfrac{3}{2}y + z, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0,1), (\tfrac{3}{2}, 1, 0)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(3,2,0)}_{v_2}\}.
\end{aligned}$$

La famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1}$ et c'est aussi aussi une famille libre (car 2 vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $E_{\lambda_1}$ et $\dim E_{\lambda_1} =$

$card\{v_1, v_2\} = 2$. L'espace propre associé à $\lambda_2 = -1$ est $E_{\lambda_2} = Ker(f - \lambda_2 Id) = Ker(f + Id)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_2} = Ker(f+Id) \quad &\Leftrightarrow (A+Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -4 & 8 & 4 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + 6y + 4z = 0 \\ -4x + 8y + 4z = 0 \\ 4x - 6y - 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -z \\ -x + y = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3;\ x = y = -z\} \quad &= \{(x, x, -x); x \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,1,-1)}_{v_3}\} \text{ (c'est une droite vectoriel de } \mathbb{R}^3\text{)}
\end{aligned}$$

La famille $\{v_3\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_2}$ et c'est aussi aussi une famille libre (car $v_3 \neq \overrightarrow{0}$) donc c'est une base de $E_{\lambda_2}$ et $\dim E_{\lambda_2} = card\{v_3\} = 1$.

3. Démontrer que la matrice $A$ est diagonalisable et la diagonaliser en précisant la matrice de passage $P$ ainsi que $P^{-1}$.

   On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2} r_i = r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3 = dim(\mathbb{R}^3), \\ \dim E_{\lambda_1} = 2 = r_1, \\ \dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2. \end{array} \right.$$

   D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

   Considérons la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, concaténation d'une base de $E_{\lambda_1}$ et de $E_{\lambda_2}$. Puisque $f$ est diagonalisable, c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (rappelons que pour tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, les espaces propres sont toujours en somme directe donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Puisque $f$ est diagonalisable, $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre de $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = dim\mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$, i.e. $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \mathbb{R}^3$ ce qui signifie que les espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On peut aussi simplement revérifier que $det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ )

   On a donc

$$A' = Mat_{f,\{v_1,v_2,v_3\}} = P^{-1}AP$$

   où $P$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A'$ est alors

$$A' = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}.$$

On obtient ce résultat car

(a) le vecteur $v_1 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_1) = \lambda_1 v_1 = v_1$

(b) le vecteur $v_2 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_2) = \lambda_1 v_2 = v_2$

(c) le vecteur $v_3 \in E_{\lambda_2}$ donc $f(v_3) = \lambda_2 v_3 = -v_3$

On retrouve ce résultat en faisant le calcul

$$A' = Mat_{f,\{v_1,v_2,v_3\}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} AP$$

(rappelons que la matrice $P^{-1} = \frac{1}{detP}\ {}^tCom(P)$).
On aura besoin de la matrice $P^{-1}$ pour la suite de l'exercice.

4. Calculer les matrices $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $Exp(A)$.
On a

$$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$$

et

$$A^n = P(A')^n P^{-1}.$$

Or puisque $A'$ est diagonale, on a

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2(-1)^n & 3-3(-1)^n & 2-2(-1)^n \\ -2+2(-1)^n & 4-3(-1)^n & 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & -3+3(-1)^n & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

La matrice $ExpA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (cette série est toujours convergente) On a

$$ExpA = PExp(A')P^{-1}$$

mais, puisque $A'$ est diagonale, on a

$$Exp(A') = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} ExpA &= PExp(A')P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 3e & e^{-1} \\ 0 & 2e & e^{-1} \\ e & 0 & -e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e+2e^{-1} & 3e-3e^{-1} & 2e-2e^{-1} \\ -2e+2e^{-1} & 4e-3e^{-1} & 2e-2e^{-1} \\ 2e-2e^{-1} & -3e+3e^{-1} & -e+2e^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. On considère les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par leur premier terme $u_0 = -1, v_0 = 2$ et $w_0 = 1$ et les relations suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 7v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - 6v_n - 3w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Exprimer $X_{n+1}$ en fonction d'une matrice $A$ et $X_n$.

On a $X_{n+1} = AX_n$. D'où

$$X_n = A^n X_0$$

avec

$$X_n = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$X_n = P(A')^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 9 - 10(-1)^n \\ 12 - 10(-1)^n \\ -9 + 10(-1)^n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$

En déduire $u_n, v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

On a donc

$$\begin{cases} u_n = 9 - 10(-1)^n \\ v_n = 12 - 10(-1)^n \\ w_n = -9 + 10(-1)^n \end{cases}$$

## Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires

1.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $x_0$, $y_0$ donnés.

on a

$$X'(t) = AX(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in End(\mathbb{R}^2)$ (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) de matrice $A$ dans la base canonique. Alors

$$\begin{aligned} c_f(X) &= c_A(X) = det(f - XId) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(-1-X) - 3 = X^2 - 1 - 3 = X^2 - 4 = (X-2)(X+2) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $f$ sont $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité $r_2 = 1$.

On a $r_1+r_2 = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$ et pour $i \in \{1, 2\}$, $1 \leq dim(E_{\lambda_i}) \leq r_i = 1$ ce qui implique que $dim(E_{\lambda_i}) = 1 = r_i$. D'après la critère de diagonalisation des endomorphismes, $f$ est diagonalisable et il existe $P$ inversible telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

est diagonale. Prenons $P$ la matrice de passage de la base canonique $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ à la base $\{v_1, v_2\}$ avec $\{v_i\}$ une base de l'espace propre $E_{\lambda_i}$, alors $f(v_i) = \lambda_i v_i$ d'où

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On aura cependant besoin de calculer les espaces propres pour avoir explicitement la matrice $P$, $P^{-1}$, ainsi que $ExpA$, $A^n$, etc.

Déterminons $E_{\lambda_1} = Ker(f - 2Id)$ l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_{\lambda_1} = Ker(f - 2Id) \quad &\Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2Id \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3y \end{aligned}$$

D'où

$$E_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 3y\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(3, 1)}_{v_1}\}.$$

De même on montre que

$$E_{\lambda_2} = Ker(f + 2Id) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -y\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1, -1)}_{v_2}\}.$$

Ainsi en prenant $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2\}$, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)}\ {}^tCom(P) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La solution du système différentiel est

$$\begin{aligned} X(t) &= Exp((t-t_0)A)X_0 = Exp(tA)X_0 = PExp(tA')P^{-1}X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Exp\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t}+e^{-2t} & 3e^{2t}-3e^{-2t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & e^{2t}+3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} (3e^{2t}+e^{-2t})x_0 + (3e^{2t}-3e^{-2t})y_0 \\ (e^{2t}-e^{-2t})x_0 + (e^{2t}+3e^{-2t})y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}[(3e^{2t}+e^{-2t})x_0 + (3e^{2t}-3e^{-2t})y_0] \\ y(t) = \frac{1}{4}[(e^{2t}-e^{-2t})x_0 + (e^{2t}+3e^{-2t})y_0] \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $x_0$, $y_0$ donnés.

on a

$$X'(t) = AX(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 3

On désigne par $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'endomorphisme $f$ est diagonalisable

   On calcule le polynôme caractéristique et on trouve

   $$c_f(X) = -(X-2)^2(X-1)$$

   donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_1 = 1$.

   On détermine les espaces propres:

   $$E_{\lambda_1=2} = Ker(f - 2Id) = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0,1),(3,2,0)\}$$

   et $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (3,2,0)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=2}$ (puisque $E_{\lambda_1=2} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$ ) et c'est aussi une famille libre puisque les deux vecteurs sont non colinéaires.

   $$E_{\lambda_2=1} = Ker(f - Id) = Vect_{\mathbb{R}}\{(-1,-1,1)\}$$

   et $\{v_3 = (-1,-1,1)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_2=1}$ (puisque $E_{\lambda_2=1} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_3\}$ ) et c'est aussi une famille libre puisque le vecteur $v_3 \neq \overrightarrow{0}$.

   On a donc $r_1 + r_2 = 3 = \mathbb{R}^3$, $\dim E_{\lambda_1=2} = 2 = r_1$ et $\dim E_{\lambda_2=1} = 1 = r_2$ donc, d'après le critère de diagonalisation, $f$ est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice $P$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

   $$A' = P^{-1}AP = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}.$$

   (si on ne fait pas le calcul matriciel, il faut tout de même justifier le résultat: $v_1 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_1) = \lambda_1 v_1 = 2v_1$, $v_2 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_2) = \lambda_1 v_2 = 2v_2$ et $v_3 \in E_{\lambda_2}$ donc $f(v_3) = \lambda_2 v_3 = v_3$).

   On peut vérifier que le produit des matrices donne bien le résultat annoncé :

   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système linéaire

   $$\begin{cases} x'(t) = 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avec $x_0$, $y_0$ et $z_0$ donnés.

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $A$ est la matrice de la question 1 et elle est donc diagonalisable.

On a

$$X(t) = Exp[(t - t_0)A]X_0 = Exp[(t)A]X_0 \text{car ici } t_0 = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} Exp(tA) &= PExp(tA')P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{2t} & -e^t \\ 0 & 2e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ -2e^{2t} + 2e^t & 4e^{2t} - 3e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ 2e^{2t} - 2e^t & -3e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + 2e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$X(t) = Exp(tA)X_0 = \begin{pmatrix} [-e^{2t} + 2e^t]x_0 + [3e^{2t} - 3e^t]y_0 + [2e^{2t} - 2e^t]z_0 \\ [-2e^{2t} + 2e^t]x_0 + [4e^{2t} - 3e^t]y_0 + [2e^{2t} - 2e^t]z_0 \\ [2e^{2t} - 2e^t]x_0 + [-3e^{2t} + 3e^t]y_0 + [-e^{2t} + 2e^t]z_0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x(t) = [-e^{2t} + 2e^t]x_0 + [3e^{2t} - 3e^t]y_0 + [2e^{2t} - 2e^t]z_0 \\ y(t) = [-2e^{2t} + 2e^t]x_0 + [4e^{2t} - 3e^t]y_0 + [2e^{2t} - 2e^t]z_0 \\ z(t) = [2e^{2t} - 2e^t]x_0 + [-3e^{2t} + 3e^t]y_0 + [-e^{2t} + 2e^t]z_0 \end{cases}$$

## Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelles conditions sur $u_0$, $v_0$, $w_0$, ces suites sont-elles convergentes?

Le système s'écrit

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On aura $X_n = A^n X_0$ ce qui nous permettra de déduire $(u_n)_n$ , $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ en fonction de $u_0$, $v_0$ et $w_0$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base canonique.

On calcule le polynôme caractéristique

$$c_f(X) = det(A - XId) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 2+X & 0 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = -(X+2) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 2 & -1-X \end{vmatrix} = -(X+2)(X+X^2-2)$$
$$= -(X+2)(X-1)(X+2) = -(X+2)^2(X-1)$$

donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_1 = 1$.

On détermine $E_{\lambda_1=-2} = Ker(f+2Id)$, l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 > 1$. On a

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_2} = Ker(f + I2d) \quad \Leftrightarrow (A+2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Puisque $E_{\lambda_1}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est un espace de dimension 2. Trouvons tout de suite une base de cet espace dont nous aurons besoin par la suite. La famille $\{v_1 = (1,-1,0), v_2 = (1,0,-1)\}$ est une famille de deux vecteurs de $E_{\lambda_1}$ puisque vérifiant l'équation cartésienne de ce plan et $\{v_1, v_2\}$ est aussi une famille libre car ce sont deux vecteurs non colinéaires de $E_{\lambda_1=-2}$ donc $\{v_1, v_2\}$ une base de $E_{\lambda_1=-2}$.

La valeur propre $\lambda_2 = 1$ étant une valeur propre simple (= de multiplicité 1), on peut montrer que $\dim E_{\lambda_2} = 1$. Ainsi les conditions du théorème de diagonalisation sont vérifiées puisque $r_1 + r_2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\dim E_{\lambda_1} = 2 = r_1$ et $\dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2$ et la matrice $A$ est diagonalisable.

On a donc $r_1 + r_2 = 3 = \mathbb{R}^3$, $\dim E_{\lambda_1=-2} = 2 = r_1$ et $\dim E_{\lambda_2=1} = 1 = r_2$ donc, d'après le critère de diagonalisation, $f$ est diagonalisable.

Pour trouver explicitement une matrice $P$ telle que $P^{-1}AP = A'$ avec $A'$ une matrice diagonale il est nécessaire de déterminer aussi une base de $E_{\lambda_2=1}$. Comme cet espace est de dimension 1, une base est donnée par un vecteur non nul qui appartient à cet espace. Or le vecteur $v_3 = (1,1,1)$ vérifie $f(1,1,1) = (1,1,1)$ (puisque $AV_3 = V_3$ où $V_3$ est le vecteur colonne des coordonnées de $v_3$ dans la base canonique) donc $v_3$ est un vecteur de $E_{\lambda_2=1}$ et il est non nul. Une base de $E_{\lambda_2=1}$ est donc donné par $\{v_3\}$.

Puisque $f$ est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^3 = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ et une base de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et elle est constitué uniquement de vecteurs propres de $f$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$A' = P^{-1}AP = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}.$$

On peut vérifier que le produit des matrices

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2\times(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2\times(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où, puisque $X_n = A^nX_0$

$$\begin{cases} u_n = (1+2\times(-2)^n)u_0 + (1-(-2)^n)v_0 + (1-(-2)^n)w_0 \\ v_n = (1-(-2)^n)u_0 + (1+2\times(-2)^n)v_0 + (1-(-2)^n)w_0 \\ w_n = (1-(-2)^n)v_0 + (1-(-2)^n)v_0 + (1+2\times(-2)^n)w_0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(u_0+v_0+w_0) + \frac{(-2)^n}{3}(2u_0 - v_0 - w_0) \\ v_n = \frac{1}{3}(u_0+v_0+w_0) + \frac{(-2)^n}{3}(-u_0 + 2v_0 - w_0) \\ w_n = \frac{1}{3}(u_0+v_0+w_0) + \frac{(-2)^n}{3}(-u_0 - v_0 + 2w_0) \end{cases}.$$

Or $(-2)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$ donc pour que les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent, il faut que

$$\begin{cases} 2u_0 - v_0 - w_0 = 0 \\ -u_0 + 2v_0 - w_0 = 0 \\ -u_0 - v_0 + 2w_0 = 0 \end{cases}.$$

On trouve que $u_0 = v_0 = w_0$.

**Exercice 5**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O_n$. Le plus petit $k$ tel que $A^k = O_n$ est alors appelé l'indice de nilpotence de $A$.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A$ est nilpotente et précisez son indice de nilpotence.

   On a

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = 0_{3\times 3}.$$

   donc $A$ est nilpotente d'ordre 3.

2. La matrice $A$ est-elle diagonalisable?

   Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base canonique. On montre que le polynôme caractéristique de $f$ (et de $A$) est

   $$c_f(X) = c_A(X) = -X^3$$

   donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de $f$ (et de $A$ de multiplicité $r = 3$. Si $A$ était diagonalisable, il existerait une matrice $P$ inversible telle que

   $$P^{-1}AP = 0_{3\times 3} \Leftrightarrow A = P \times 0_{3\times 3} \times P^{-1} = 0_{3\times 3}.$$

   Comme $A \neq 0_{3\times 3}$, elle n'est pas diagonalisable. (on aurait aussi pu démontrer que la matrice $A$ n'était pas diagonalisable en montrant que l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ de $f$ n'est pas de dimension 3, i.e $\dim E_{\lambda=0} \neq 3 = r$)

3. Déterminer les matrices $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $Exp(A)$

   On a calculer $A^n$ pour $n \geq 3$. Pour $n > 3$, on a $A^n = A^{n-1} = A \times 0_{3\times 3} = 0_{3\times 3}$. Pour calucler $Exp(A)$ on utilise la formule

   $$ExpA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = Id + A + \frac{1}{2}A^2$$
   $$\text{(}A\text{ est nilpotente d'ordre 3 donc tous les termes qui suivent sont nuls)}$$

   d'où

   $$\begin{aligned} ExpA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -\frac{17}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$