UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Physique-Chimie-SPI
Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE et APPLICATIONS

Elisabeth REMM

Chapitre 1- CORRECTION DES EXERCICES 6 à 14

Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 6. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 4 rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$ de composantes

$$\overrightarrow{X_1} = (2, 1, 4, -3),\ \overrightarrow{X_2} = (1, -1, -1, -3),\ \overrightarrow{X_3} = (1, 2, 5, 0).$$

1. **Montrer que ces vecteurs sont linéairement dépendants et donner une relation par laquelle ils sont liés (= linéairement dépendants).**

   On peut facilement vérifier que $\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{X_3}$. Les vecteurs $\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}$ et $\overrightarrow{X_3}$ sont donc liés. Une combinaison linéaire nulle s'écrit ici

   $$\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{0}.$$

2. **En déduire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs et en donner une base.**

   Soit $F = Vect_{\mathbb{K}}\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2},\ \overrightarrow{X_3}\}$ l'espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs. On a

   $$F = Vect_{\mathbb{K}}\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}\}$$

   puisque $\overrightarrow{X_3}. = \overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2}$. Ainsi la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}\}$ est une famille génératrice de F mais c'est aussi une famille libre de F puisque pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

   $$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{X_1} + \beta\overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow (2\alpha+\beta, \alpha-\beta, 4\alpha-\beta, -3\alpha-3\beta) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2\alpha & +\beta & = 0 \\ \alpha & -\beta & = 0 \\ 4\alpha & -\beta & = 0 \\ -3\alpha & -3\beta & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\alpha+\beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \\ 4\alpha - \beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

   La famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}\}$ est libre et génératice, c'est donc une base de F. On en déduit

   $$\dim F = 2.$$

3. **Compléter cette base pour obtenir une base de E.**
Comme E est de dimension 4, toute base de E a 4 éléments. Afin d'obtenir une base de E, il faut ajouter 2 vecteurs à la famille $\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}\}$ de manière à ce que les 4 vecteurs ainsi obtenus forment une famille libre. On peut toujours le faire en ajoutant des vecteurs de la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ (cela permet plus facilement de vérifier que la famille de 4 vecteurs est une base de E en simplifiant le calcul du déterminant associé à cette vérification). Prenons $\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Cette famille est une base de E si et seulement si la matrice de ces quatre vecteurs, c'est-à-dire la matrice

$$M = Mat(\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})_{\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $\det(M) \neq 0$.
En développant par rapport à la troisième colonne puis par rapport à la quatrième, on obtient

$$detM = det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = -12 - 3 = -15 \neq 0.$$

Ainsi $\{\overrightarrow{X_1},\ \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est une base de E.
Remarque. Le sous-espace vectoriel $H = Vect_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ est un espace supplémentaire de F (la concaténation d'une base de F et d'une base de H est une base de E.

Exercice 7. Dans un espace vectoriel complexe E à trois dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{e_2} + i\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{e_3} + i\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{e_1} + i\overrightarrow{e_2}.$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base et trouver dans cette base les composantes du vecteurs $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Considérons la matrice P des vecteurs $\overrightarrow{X_i}$ relative à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$:

$$P = Mat(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3})_{\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}} = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(P) = -i \det \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} = -i(-i^2) + 1 = 2 \neq 0$$

donc $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}\}$ est une base de E et P est la matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ à la base $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}\}$. Le vecteur colonne des composantes de $\overrightarrow{Y}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et si on note

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $\overrightarrow{Y}$ dans la base $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}\}$, ce vecteur colonne vérifie l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Comme P est inversible (son d/'eterminant est diff/'erent de 0, on aura

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\overrightarrow{Y} = a\overrightarrow{X_1} + b\overrightarrow{X_2} + c\overrightarrow{X_3} = \frac{1-i}{2}(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}).$$

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels F_1,F_2 et F_3 sont dits supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}$$

avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2$ et $\overrightarrow{X_3} \in F_3$.

1. **Soient F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, F_2 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ et F_3 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0,2,0)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.**

   Ces espaces sont supplémentaires si une concaténation des bases de F_1, F_2 et F_3 donne une base de $\mathbb{R}^3$. Une base de F_1 est donné $\{v_1\}$ car c'est une famille génératrice de F_1 et libre puisque $v_1 \neq \overrightarrow{0}$. On montre de même que $\{v_2\}$ est une base de F_2 et que $\{v_3\}$ est une base de F_3. Ces trois vecteurs sont ind/'ependants et forment une base si et seulement si la matrice

   $$M = Mat(v_1, v_2, v_3)_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   est inversible, ce qui est équivalent à dire que son détermiant est non nul.

   $$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et F_1, F_2 et F_3 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. **Soit F_4 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_4} = (1,2,1)$, F_5 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (1,1,0)$ et F_6 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_6} = (0,1,1)$. Montrer que $F_i \cap F_j = \{\overrightarrow{0}\}$ pour tout $i, j = 4,5,6,\ i \neq j$ Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?**
On montre comme précédemment qu'une base de F_4 est $\{\overrightarrow{v_4} = (1,2,1)\}$, une base de F_5 est $\{\overrightarrow{v_5} = (1,1,0)\}$ et une base de F_6 est $\{\overrightarrow{v_6} = (0,1,1)\}$. Soit
$$M_1 = Mat(v_4, v_5, v_6)_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice vérifie
$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (2-1) = 0.$$
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}, \overrightarrow{v_6}$ ne sont pas linéairement indépendants. Donc F_4, F_5 et F_6 ne sont pas supplémentaires. Pourtant on peut montrer que les espaces $F_4 \cap F_5 = \{\overrightarrow{0}\}$ puisque $(x,y,z) \in F_4 \cap F_5 \Leftrightarrow (x,y,z) = \alpha(1,2,1) = \beta(1,1,0)$ implique que
$$\begin{cases} (x,y,z) = \alpha(1,2,1) \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ (x,y,z) = \overrightarrow{0} \end{cases}$$
donc $F_4 \cap F_5 = \{\overrightarrow{0}\}$. On montrer de même que $F_4 \cap F_6 = \{\overrightarrow{0}\}$ et $F_5 \cap F_6 = \{\overrightarrow{0}\}$.
On peut trouver $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui s'écrit de plusieurs manière : par exemple comme $(1,2,1) - (1,1,0) = (0,1,1)$ on a $(0,1,1) = (0,0,0) + (0,0,0) + (0,1,1) = (1,2,1) + (-1,-1,0) + (0,0,0)$. On a donc deux écritures différentes pour un vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de F_4, d'un vecteur de F_5 et d'un vecteur de F_6.
Remarque. On peut aussi trouver ici des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne se décomposent pas comme une somme d'un vecteur de F_4, d'un vecteur de F_5 et d'un vecteur de F_6, par exemple le vecteur $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$. En effet on remarque tout d'abord que
$$Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}, \overrightarrow{v_6}\}$$
puisque $\overrightarrow{v_6} = \overrightarrow{v_4} - \overrightarrow{v_5}$. Considérons la matrice
$$M_2 = Mat(\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}, \overrightarrow{v})_{\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M) = 1 - 2 = -1 \neq 0$ *donc* $(0,0,1) \notin Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}, \overrightarrow{v_6}\}$. *Ainsi* v *n'est pas une combinaison linéaire de* $\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}, \overrightarrow{v_6}\}$ *et n'appartient pas à* $F_4 + F_5 + F_6 = \{u_4 + u_5 + u_6;\ u_i \in F_i\} = \{\alpha\overrightarrow{v_4} + \beta\overrightarrow{v_5} + \gamma\overrightarrow{v_6};\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ *(on utilise les bases des* F_i*).*

Exercice 9 On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0,\ \text{et } x + z = 0\right\}$$

1. **Donner une base de F.**
$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ y = -x \text{ et } z = -x = 0\} \\ &= \{(x, -x, -x, t) \in \mathbb{R}^4;\ x, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4;\ x, t \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect_{\mathbb{R}}\{v_1 = (1, -1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$
La famille $\{v_1 = (1, -1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de F de plus c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de F et $\dim F = 2$.
2. **Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.**
Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, toute base de $\mathbb{R}^4$ est constituée de 4 vecteurs linéairement indépendants. Il faut donc ajouter 2 vecteurs à la base de F de sorte que la famille nouvellement obtenue soit libre. On peut prendre $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ et vérifier que c'est bien une base de $\mathbb{R}^4$ en calculant le déterminant de la matrice
$$M = Mat(v_1, v_2, e_3, e_4)_{\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Puisque
$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$
la famille $\{v_1, v_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice M est la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, e_3, e_4\}$
3. **On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$, $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?**
$\{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3, 4), u_3 = (-1, 0, -1, 0)\}$ est une famille libre si et seulement si $(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma = 0)$
Posons $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0, 0)$. Ceci est équivalent à
$$(\alpha + \beta - \gamma, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta - \gamma, \alpha + 4\beta) = (0, 0, 0, 0)$$

Résolvons le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+2\beta=0 \\ \alpha+3\beta-\gamma=0 \\ \alpha+4\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+2\beta=0 \\ 2\beta=0 \\ \alpha+4\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

On en déduit que $\{u_1=(1,1,1,1), u_2=(1,2,3,4), u_3=(-1,0,-1,0)\}$ est une famille libre.

4. **On pose G le sous-espace engendré par $\{u_1,u_2,u_3\}$. Quelle sa dimension ?**
   On a $G=Vect_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2,u_3\}$ donc la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est une famille génératrice de G et puisque d'après la question précédente c'est aussi une famille libre, c'est une base de G et
   $$\dim(G)=3.$$
5. **Donner une base de $F\cap G$.**
   On a $(x,y,z,t)\in F\cap G \Leftrightarrow (x,y,z,t)=(x,-x,-x,t)=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3$.
   Or $(x,-x,-x,t)=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ si et seulement si
   $(x,-x,-x,t)=(\alpha+\beta-\gamma, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta-\gamma, \alpha+4\beta)$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=x \\ \alpha+2\beta=-x \\ \alpha+3\beta-\gamma=-x \\ \alpha+4\beta=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4\beta=t \\ \alpha+\beta-\gamma=x \\ 2\alpha+3\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+4\beta-2\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4\beta=t \\ \alpha+\beta-\gamma=x \\ 2\alpha+3\beta-\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4\beta=t \\ \beta=\gamma \\ \alpha=x \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4\beta=t \\ \beta=\gamma \\ \alpha=x \\ \alpha=-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ t=-3\alpha \\ \gamma=-\alpha \\ \beta=-\alpha \end{cases}$$
   d'où
   $$F\cap G=\{(x,-x,-x,-3x);\ x\in\mathbb{R}\}=Vect_{\mathbb{R}}\{(1,-1,-1,-3)\}.$$
   Ainsi $\{(1,-1,-1,-3)\}$ est une famille génératrice de $F\cap G$ et libre (puisque c'est un vecteur non nul) et $\{(1,-1,-1,-3)\}$ est une base de $F\cap G$. Donc $\dim(F\cap G)=1$ et les espaces F et G ne sont pas en somme directe.
6. **En déduire que $F+G=\mathbb{R}^4$.**
   On a $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=3+2-1=4$ donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et de même dimension. Ainsi$F+G=\mathbb{R}^4$.
7. **Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et un élément de G ?**
   Non car les espaces F et G ne sont pas en somme directe puisque $F\cap G$ n'est pas réduit à $\{(0,0,0,0)\}$. Par exemple le vecteur $(0,0,0,3)$ s'écrit
   $$(0,0,0,3)=(0,0,0,3)-(1,-1,-1,-3)+(1,-1,-1,-3)=(0,0,0,3)+(0,0,0,0)$$

Considérons les vecteurs de F

$$w_1 = (0,0,0,3) - (1,-1,-1,-3) = (-1,1,1,6), \quad w_1' = (0,0,0,3)$$

ainsi que les vecteurs

$$w_2 = (1,-1,-1,-3),\ w_2' = (0,0,0,0).$$

On a

$$w_1 + w_2 = (0,0,0,3) = w_1' + w_2'$$

On a donc trouver deux manières d'écrire le vecteur $(0,0,0,3)$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 10. On considère dans $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,2,0,1)\ v_2 = (1,0,2,1),\ v_3 = (2,2,2,2),$$
$$w_1 = (1,2,1,0)\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1),\ w_4 = (2,2,2,2).$$

1. **Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.**
   Les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants puisque

   $$\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\beta, 2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = 0 = \beta$$

   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée puisque $v_1 + v_2 = v_3$
2. **Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3.**
   (a) **Déterminer une base de F.**
   On a $F = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2, v_3\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$ puisque $v_1 + v_2 = v_3$.
   La famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de F et puisque c'est aussi une famille libre, c'est une base de F.
   (b) **Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.**
   Un sous-espace vectoriel H est un sous-espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ c'est à dire qu'une concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^4$ (tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G). Considérons la famille $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$. La matrice correspondante est

   $$M = Mat(v_1, v_2, e_1, e_2)_{\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On a $\det(M) = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. Cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$ et donc $H = Vect_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ est un espace supplémentaire de F.

3. **Montrer que la famille $\{w_1 = (1,2,1,0),\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1)\}$ est libre et que $\{w_1, w_2, w_3, w_4 = (2,2,2,2)\}$ est liée.**

Comme

$$\begin{aligned}
\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow (\alpha - \beta + 2\gamma, 2\alpha + \beta - \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (0,0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = -\beta \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = -\beta \\ -\beta - \beta - 2\beta = 0 \\ -2\beta + \beta + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\beta = 0 \\ \gamma = -\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma
\end{aligned}$$

la famille $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ est donc libre. La relation

$$w_4 = w_1 + w_2 + w_3$$

montre que la famille $\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4\}$ est liée

4. **Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre.**

Ici on a 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ donc pour montrer que l'on a une famille libre on peut calculer le déterminant de la matrice associée, c'est-à-dire de la matrice

$$M = Mat(v_1, v_2, w_1, w_2)_{\{e_1,e_2,e_3,e_4\}} = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $det(M) = det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 & C_4 + C_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ (L_2 - L_1) \ = -2 \times det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -2(2+4) = -12 \neq 0$

donc la famille est libre et puisque c'est une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et M est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$.

5. **Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4. Déterminer une base de G.**
On a
$$G = Vect_{\mathbb{R}}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = Vect_{\mathbb{R}}\{w_1, w_2, w_3\}$$
car d'après la question 3) la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et la famille $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ liée donc w_4 s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ et en enlevant ce vecteur on a encore une famille génératrice de G. Donc $\{w_1, w_2, w_3\}$ est base de G puisque c'est une famille génératrice de G et que c'est aussi une famille libre. Ainsi $\dim(G) = 3$.

6. **Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?** On sait tout de suite que F et G ne sont pas supplémentaires car $F+G$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 5 - \dim(F \cap G) \leq 4$$
ce qui implique $dim(F \cap G) \geq 1$. Donc les espaces F et G ne sont pas en somme directe et ne sont donc pas supplémentaires.
De plus $F \cap G$ ne peut pas être de dimension 2 car dans ce cas on aurait $F \cap G = F$.
Déterminons $F \cap G$
On a
$$F = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1 = (1,2,0,1)\ v_2 = (1,0,2,1)\}$$
et
$$G = Vect_{\mathbb{R}}\{w_1 = (1,2,1,0)\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1\}.$$
Soit $(x,y,z,t) \in F \cap G$. Ceci est équivalent à
$$(x,y,z,t) = \alpha v_1 + \beta v_2 = a w_1 + b w_2 + c w_3.$$
Or $\alpha v_1 + \beta v_2 = a w_1 + b w_2 + c w_3$. Ainsi
$(\alpha + \beta - a + b - 2c, 2\alpha - 2a - b + c, 2\beta - a - b, \alpha + \beta - b - c) = (0,0,0,0)$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} \alpha & +\beta & -a & +b & -2c & = 0 \\ 2\alpha & & -2a & -b & +c & = 0 \\ & 2\beta & -a & -b & & = 0 \\ \alpha & +\beta & & -b & -c & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} \alpha & +\beta & -a & +b & -2c & = 0 \\ & -2\beta & & -3b & +5c & = 0 \\ & 2\beta & -a & -b & & = 0 \\ & & a & -2b & +c & = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} \alpha & +\beta & -a & +b & -2c & = 0 \\ & -2\beta & & -3b & +5c & = 0 \\ & & -a & -4b & 5c & = 0 \\ & & a & -2b & +c & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} \alpha & +\beta & -a & +b & -2c & = 0 \\ & -2\beta & & -3b & +5c & = 0 \\ & & -a & -4b & 5c & = 0 \\ & & & -6b & +6c & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = c \\ \beta = c \\ \alpha = c \end{cases}$$

Ainsi $F \cap G = \{(2c, 2c, 2c, 2c); c \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{w_4\}$ et $dim F \cap G = 1$.

Exercice 11 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1- La matrice

$$\begin{array}{cc} f_1(e_1) & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{array} \end{array}$$

correspond à la matrice d'une application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ dans les bases canoniques $\{e_1 = 1\}$ de $\mathbb{R}$ et $\{\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, , 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

On a $Im(f_1) = Vect_{\mathbb{R}}\{f_1(e_1)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(0, 1, 1, 0)\}$ qui admet pour base $\{(0, 1, 1, 0)\}$ puisque c'est une famille génératrice de $Im\, f_1$ et aussi une famille libre car $(0, 1, 1, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$. Donc $\dim(Im\, f_1) = 1$. D'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R} = \dim(Im\, f_1) + \dim(Ker\, f_1)$$

d'où $\dim(Ker\, f_1) = 0$ et $Ker\, f_1 = \{\overrightarrow{0}\}$.

2- La matrice

$$\begin{array}{cccccc} f_2(e_1) & f_2(e_2) & f_2(e_3) & f_2(e_4) & & \\ (\ 0 & 1 & 1 & 0 \ ) & \varepsilon_1 \end{array}$$

correspond à la matrice d'une application $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dans les bases canoniques $\{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\{\varepsilon_1 = 1\}$ de $\mathbb{R}$.

On a $Im(f_2) = Vect_{\mathbb{R}}\{f_2(e_1), f_2(e_2), f_2(e_3), f_2(e_4)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{0, 1, 1, 0\} = Vect_{\mathbb{R}}\{1\} = \mathbb{R}$. Donc $\dim(Im\, f_2) = 1$. D'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(Im\, f_2) + \dim(Ker\, f_2)$$

d'où $\dim(Ker\, f_2) = 3$. On a d'après la matrice $f_2(e_1) = 0 = f_2(e_4)$ et $e_2, e_3 \in Ker\, f_2$. De plus $f_2(e_2) - f_2(e_3) = 1 - 1 = 0$ mais f_2 est linéaire donc $f_2(e_2) - f_2(e_3) = f_2(e_2 - e_3)$

et $e_2 - e_3 \in Ker\, f_2$. On a trois vecteurs linéairement indépendants de $Ker\, f_2$ qui est de dimension 3 : c'est donc une base de cet espace et $Ker\, f_2 = \{e_1, e_4, e_2 - e_3\}$.

3- La matrice

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f_3(e_1) & f_3(e_2) & f_3(e_3) & f_3(e_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \end{array}$$

correspond à la matrice d'une application $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dans les bases canoniques

$\{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et

$\{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)\, \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. On peut constater que $f_3(e_4) = (0,0,0)$ donc $e_4 \in Ker f_3$. On a aussi $f_3(e_1 + 2e_2 - e_3) = f_3(e_1) + 2f_3(e_2) - f_3(e_3) = (0,0,0)$ d'où $e_1 + 2e_2 - e_3 \in Ker\, f_3$ d'où $Vect_{\mathbb{R}}\{e_4, e_1 + 2e_2 - e_3\} \subset Ker\, f_3$ et $\dim Ker\, f_3 \geq 2$ car $\{e_4, e_1 + 2e_2 - e_3\}$ est une famille libre. On a également que $f_3(e_1) = (0,1,0), f_3(e_2) = (1,0,1) \in Im f_3$ d'où $Vect_{\mathbb{R}}\{(0,1,0),(1,0,1)\} \subset Im\, f_3$ et $\dim Im\, f_3 \geq 2$ car $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ est une famille libre. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim Ker\, f_3 + \dim Im\, f_3$$

et d'après ce qui précède $\dim Im\, f_3 = 2 = \dim Ker\, f_3$. Ainsi $Vect_{\mathbb{R}}\{e_4, e_1 + 2e_2 - e_3\} = Ker\, f_3$ et $Vect_{\mathbb{R}}\{(0,1,0),(1,0,1) = Im\, f_3$.

4- La matrice

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f_4(e_1) & f_4(e_1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \end{array}$$

correspond à la matrice d'une application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans les bases canoniques $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0)\, \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Comme $Im\, f_4 = Vect_{\mathbb{R}}\{f_4(e_1) = (1,3,5), f_4(e_2) = (2,4,6)\}$ et que ces deux vecteurs forment une base de $Im\, f_4$ puisque c'est une famille génératrice et libre, $\dim Im\, f_4 = 2$. D'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim(Im\, f_4) + \dim(Ker\, f_4)$$

donc $\dim(Ker\, f_4) = 0$ et $Ker\, f_4 = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice 12

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. **Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de Im f.**
On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,0,1)$, $f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,1,1)$, $f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1,2)$ d'où
$$\mathrm{Im} f = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,-1,0,1),(0,1,1,1),(1,0,1,2)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,-1,0,1),(0,1,1,1)\}$$
car $(1,0,1,2) = (1,-1,0,1) + (0,1,1,1)$.
La famille de vecteurs $\{(1,-1,0,1),(0,1,1,1)\}$ est génératrice de Imf de plus elle est libre car ce sont deux vecteurs non colinéaires et on a donc une base de Imf. Ainsi $\dim \mathrm{Im} f = 2$.
2. **Déterminer une base de Ker f.**
D'après le théorème du rang
$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim Kerf + \dim Imf$$
d'où $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$. Or $f(e_1) + f(e-2) - f(e_3) = (0,0,0,0)$ d'où, puisque f est linéaire,
$$f(e_1 + e_2 - e_3) = (0,0,0,0$$
et $e_1 + e_2 - e_3 \in Kerf$. Comme $e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur non nul dans un espace vectoriel de dimension 1, c'est une base de cet espace et $Ker\, f = Vect_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_2 - e_3\}$.
3. **f est-elle injective ? surjective ?**
L'application linéaire f n'est pas injective puisque $Ker\, f \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et elle n'est pas non plus surjective puisque $Im\, f \subset \mathbb{R}^4$ avec $\dim\, Im\, f = 2 < \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc $Im\, f \neq \mathbb{R}^4$.

Exercice 13 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de Ker f et Im f.
$$(x,y,z) \in Ker\, f \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ -x & +2y & -2z & = 0 \\ & 3y & -z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ & 3y & -z & = 0 \\ & 3y & -z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3y \\ x = -4y \end{array} \right.$$

D'où $Kerf = \{(-4y, y, 3y); y \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{(-4,1,3)\}$ et $\dim Kerf = 1$ car le vecteur $(-4,1,3)$ est une base de $Kerf$. D'après le théorème du rang

$$\dim Imf = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Kerf = 3 - 1 = 2$$

et comme $Imf = Vect_{\mathbb{R}}\{f(e_1) = (1,-1,0), f(e_2) = (1,2,3), f(e_3) = (1,-2,-1)\}$ est de dimension 2,

$$Imf == Vect_{\mathbb{R}}\{(1,-1,0,(1,2,3)\}$$

puisque $\{(1,-1,0,(1,2,3)\}$ sont deux vecteurs non colinéaires. Ainsi $\{(1,-1,0,(1,2,3)\}$ est une base de l'image de f.

Exercice 14. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. **Montrer que $\{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1', f_2'\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.**
On calcule le déterminant de la matrice des coordonnées de $\{e_1', e_2', e_3'\}$ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3'\}$ c'est à dire de la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
. On a
$$\det(M) = -1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2 \neq 0$$
donc $\{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et M est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{e_1', e_2', e_3'\}$.
On fait de même avec $\{f_1', f_2'\}$: la matrice des coordonnées de $\{f_1', f_2'\}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ c'est à dire la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
. On a
$$\det(N) = (1/2)^2(-1-1) = -1/2 \neq 0$$
donc $\{f_1', f_2'\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et N est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\{f_1', f_2'\}$.

2. **Donner la matrice de u dans les nouvelles bases.**
   On a la formule de changement de base d'une application linéaire

$$A' = M_{f,\{e'_1,e'_2,e'_3\},\{f'_1,f'_2\}} = Q^{-1}AP$$

   où Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\{f'_1, f'_2\}$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   d'où

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   Remarque : On peut aussi vérifier que

$$u(e'_1) = (2,0) = 2f'_1 + 2f'_2,\ u(e'_2) = (2,-3) = -f'_1 + 5f'_2,\ u(e'_3) = (2,1) = 3f'_1 + f'_2$$

   .

Exercice 15.On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de Ker f et Im f. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Déterminons le noyau de f :

$$(x,y,z) \in Ker f \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Donc

$$Ker f = \{(x, y, -x-y);\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une famille génératrice de $Ker f$ et que c'est aussi une famille libre puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une base de $Ker f$ et $\dim Ker f = 2$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(Ker f) = 3 - 2 = 1$$

donc tout vecteur non nul qui n'est pas dans le noyau est un base de Imf. On a $f(e_1) = (1,-3,-2) \neq \overrightarrow{0}$ donc $\{(1,-3,-2)\}$ est une base de Imf.

Montrons que M^2 est la matrice de l'endomorphisme. Comme c'est la matrice de f^2, il suffit de montrer que f^2 est nul ce qui est équivalent à montrer que $f^2(e_i) = 0$. Or on a

$$f^2(e_1) = f(1,-3,-2) = (0,0,0),\ f^2(e_2) = f(1,-3,-2) = (0,0,0); f^2(e_3) = f(-(1,-3,-2)) = -f(1,-$$

donc $f^2 \equiv 0$ (fonction nulle). Donc pour tout $n \geq 2$, f^n est la fonction nulle et a pour matrice associée $M^n = O_3$.

On peut aussi calculer que $M^2 = O_3$ et donc pour tout $n \geq 2$, $M^n = M^2 \times M^{n-2} = O_3 \times M^{n-2} = O_3$.