FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2PC et Cycles.

Mathématiques: SERIES et INTEGRALES

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 2

Séries entières

Contents

1. Généralités sur les séries entières

Nous avons étudié au chapitre précédent les séries numériques qui sont des suites de sommes partielles. Si le terme général de la série numérique dépend d'un paramètre, ou d'une variable, la somme de la série, lorsqu'elle existe, est une fonction de ce paramètre. On obtient ce que l'on appelle une série de fonctions. Parmi les plus intéressantes de ces séries de fonctions, citons les séries de Fourier

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

que nous étudierons dans un des chapitres suivants, et les séries entières, objet de ce chapitre. Elles s'écrivent

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Pour une valeur de la variable x fixée, la série est une série numérique, et on s'intéresse alors à la convergence de cette série et éventuellement au calcul de la somme. Un problème se pose alors concernant la détermination des valeurs de la variables x pour lesquelles la série converge.

Exemple. La série géométrique

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

de premier terme 1 et de raison x se présente comme une série entière. Nous savons que pour $\mid x \mid < 1$ cette série converge et a pour somme

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Si $\mid x \mid \geq 1$, la série diverge. On dira que $R = 1$ est le rayon de convergence de la série.

1.1. **Définition.** Dans ce qui suit, la variable x est réelle ou complexe.

Définition 1. *Une série entière de variable réelle ou complexe x, est une série de terme général*

$$a_n\, x^n,$$

où n est un entier naturel, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes.

Exemples.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est une série entière avec $a_n = \dfrac{1}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_n = a_{2p} = \dfrac{1}{p!} \text{ si } n \text{ est pair et} \\ a_n = a_{2p+1} = 0 \text{ si } n \text{ est impair .} \end{cases}$

L'usage aussi veut que l'on adopte la notation $\sum a_n x^n$ ou $\sum_{n\geq n_0} a_n x^n$ (si a_n n'est défini que pour $n \geq n_0$) pour parler d'une série entière, tandis que l'on écrira $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$ pour son éventuelle somme, en cas de convergence, pour un x donné.

1.2. **Domaine de convergence.** Pour chaque série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ le problème est de trouver l'ensemble des points x_0 où la série numérique associée $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge.

Définition 2. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière ($a_n, x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'ensemble des $x \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge est appelé le domaine de convergence de la série entière.*

Notons que le domaine de convergence n'est jamais vide, il contient toujours la valeur 0. Le lemme fondamental suivant, appelé le Lemme d'Abel, donne une information importante sur la nature géométrique du domaine convergence.

Lemme 1. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière avec $a_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \neq 0 \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $\mid x \mid < \mid x_0 \mid$ la série numérique $\sum_{n\geq 0} \mid a_n x^n \mid$ converge, et tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $\mid x \mid < \mid x_0 \mid$ est dans le domaine de convergence (et il y a convergence absolue).*

Démonstration. Comme la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe M tel que $\mid a_n x_0^n \mid < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit x tel que $\mid x \mid < \mid x_0 \mid$ c'est à dire $\mid \frac{x}{x_0} \mid < 1$. On a alors

$$0 \leq \mid a_n x^n \mid = \mid a_n x_0^n \mid \mid \frac{x}{x_0} \mid^n < M \mid \frac{x}{x_0} \mid^n .$$

Comme $\mid \dfrac{x}{x_0} \mid < 1$, la série $\displaystyle\sum M \mid \frac{x}{x_0} \mid^n$ converge donc par comparaison la série numérique $\sum \mid a_n x^n \mid$ converge.

1.3. **Rayon de convergence d'une série entière.** Le problème de déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquels la série entière $\sum a_n x^n$ converge se résoud par simple usage de critères de comparaison et du lemme d'Abel. On en déduit

Théorème 1.

Cas complexe. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de variable complexe z. Il existe un disque de rayon R tel que*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mid z \mid < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge (on a même convergence absolue).*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mid z \mid > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

Le disque $D = \{z \in \mathbb{C}, \ \mid z \mid < R\}$ est appelé le disque de convergence.

Cas réel. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle x. Il existe segment $(-R, R)$ tel que*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mid x \mid < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge (on a même convergence absolue).*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mid x \mid > R$, la série $\sum a_n x^n$ diverge.*

Le segment $D = \{x \in \mathbb{R}, \ \mid x \mid < R\}$ est appelé le segment de convergence

Ce nombre $R \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série entière.

On déduit de ce théorème, qu'il suffit de connaître le rayon de convergence R de la série entière pour connaître "presque toutes" les valeurs de z ou x pour lesquelles la série converge. **Notons que le théorème ne dit rien pour les valeurs $\mid z \mid = R$ dans le cas complexe ou bien $x = \pm R$ dans le cas réel.** Une étude spécifique des séries numériques correspondant à chacune de ces valeurs s'impose donc.

Exemple. Les séries entières $\sum \frac{1}{n^2} z^n$, $\sum \frac{1}{n} z^n$ et $\sum z^n$ ont pour rayon de convergence 1 (on le calculera dans le paragraphe suivant), la série entière $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ converge absolument en tout point de module 1 alors qu'on a convergence absolue de $\sum \frac{1}{n} z^n$ en aucun point de module 1 mais convergence (simple) en tout point autre que 1 et la série entière $\sum z^n$ ne converge en aucun point de module 1.
Lorsque le rayon est infini, le domaine de convergence est soit le plan complexe en entier dans le cas complexe, soit la droite réelle dans le cas réel.

2. Calcul du rayon de convergence

2.1. **Règle de d'Alembert.** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable complexe ou réelle x. Supposons que les coefficients a_n soient non nuls. La règle de d'Alembert est la suivante: si

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

(cette limite étant éventuellement infinie), alors le rayon de convergence est

$$R = 1/L.$$

Lorsque $L = +\infty$, alors $R = 0$ et la série ne converge que pour $x = 0$. Si $L = 0$, alors $R = +\infty$ et la série converge pour toutes les valeurs de x.

Exemple. Considérons la série entière réelle $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n^2}$. Alors $a_n = \frac{1}{n^2}$. On a donc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

On en déduit

$$R = 1/L = 1.$$

Ainsi la série $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $-1 < x < 1$ et diverge pour $x > 1$ et $x < -1$. Il reste à étudier les cas $x = 1$ et $x = -1$. Si $x = 1$, la série s'écrit $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$. C'est une série numérique à termes positifs de Riemann. D'après les rsultats du chapitre 1, cette série converge. Si

$x=-1$, la série s'écrit $\displaystyle\sum_{n>0}\frac{(-1)^n}{n^2}$. C'est une série numérique alternée. Comme la suite $\dfrac{1}{n^2}$ est décroissante, le critère des séries alternées montre que cette série converge. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n>0}\frac{x^n}{n^2}$ converge pour $-1\leq x\leq 1$ et diverge pour $x>1$ et $x<-1$.

2.2. **Règle de Cauchy.** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable complexe ou réelle x. Supposons que les coefficients a_n soient différents de 0. La règle de Cauchy est la suivante : si

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=L$$

(cette limite étant éventuellement infinie), alors le rayon de convergence est

$$R=1/L.$$

Lorsque $L=+\infty$, alors $R=0$ et la série ne converge que pour $x=0$. Si $L=0$, alors $R=+\infty$ et la série converge pour toutes les valeurs de x.

Exemples. 1. Considérons la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n>0}\frac{x^n}{n^n}$. Alors $a_n=1/n^n$. On a donc

$$\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

On en déduit

$$R=1/L=+\infty.$$

Ainsi la série $\sum_{n>0}\frac{x^n}{n^n}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Considérons la série entière réelle $\sum_{n\geq 0}3^n x^n$. On a $a_n=3^n$ et $\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=3$. Le rayon de convergence est $R=\dfrac{1}{3}$. Ainsi pour tout $x\in]-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}[$ la série $\sum_{n\geq 0}3^n x^n$ converge et pour tout $x\in]-\infty,-\frac{1}{3}[\cup[\frac{1}{3},+\infty[$ la série $\sum_{n\geq 0}3^n x^n$ diverge. Une étude en $x=\dfrac{1}{3}$ et $x=-\dfrac{1}{3}$ montre qu'en ces points la série diverge.

2.3. **Autres méthodes pour calculer le rayon de convergence.** Parfois aucune des deux règles précédentes ne donne un résultat concret ou ne peut être utilisé. On peut alors utiliser le lemme d'Abel. En effet, si on trouve une valeur x_0 telle que $\sum a_n x_0^n$ converge, alors pour tout x tel que $\mid x\mid<\mid x_0\mid$ la série $\sum a_n x^n$ converge et $R\geq\mid x_0\mid$. Si pour une valeur x_1 de x la série numérique $\sum a_n x_1^n$ diverge, alors pour tout x tel que $\mid x\mid>\mid x_1\mid$ la série $\sum a_n x^n$ diverge et $R\leq\mid x_1\mid$. Ceci permet parfois de déterminer le rayon de convergence lorsqu'on ne peut pas utiliser les règles de Cauchy et de d'Alembert.

Si les coefficients a_n ne sont pas tous différents de 0 à partir d'un certain rang, alors aucune des deux règles ne s'appliquent. Il faut parfois faire un changement de variables pour récupérer une série entière pour laquelle une des règles s'applique.

Exemple. Considérons la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} 3^n x^{2n}$. Pour cette série, tous les coefficients d'indice impair sont nuls. On ne peut appliquer la règle de d'Alembert car les quotients $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$ ne sont pas définis, ni la règle de Cauchy car la suite $\sqrt[n]{a_n}$ n'a pas de limite. Posons
$$t = x^2.$$
La série devient $\sum_{n\geq 0} 3^n t^n$. La règle de d'Alembert, qui s'applique pour cette nouvelle série, donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$$
et donc cette série entière en la variable t a pour rayon de convergence $R_1 = \frac{1}{3}$. On en déduit que $\sum_{n\geq 0} 3^n x^{2n}$ converge lorsque $x^2 < \frac{1}{3}$ et diverge lorsque $x^2 > \frac{1}{3}$. Ainsi le rayon de convergence de la série donnée est
$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Opérations sur les séries entières

3.1. **Somme de deux séries entières.** Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ deux séries entières. On appelle somme de ces deux séries, la série entière
$$\sum_n (a_n + b_n) x^n.$$
Si R_1 et R_2 sont les rayons de convergence de ces séries , alors le rayon de convergence R de la série somme vérifie

(1) $R = \inf(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$,
(2) $R \geq R_1$ si $R_1 = R_2$

où $\inf(R_1, R_2)$ désigne le plus petit des deux nombres R_1 et R_2.

Exemple. Considérons les séries entières $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$. Le rayon de convergence de la première est $R_1 = 4$. En effet
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{R_1}.$$
Le rayon de convergence de la deuxième est $R_2 = +\infty$. En effet, d'après la règle de d'Alembert,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \frac{1}{R_2}.$$
La série somme est la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{n!}\right] x^n.$$

Son rayon de convergence est $R = 4$.

Remarquons que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] x^n$ est de rayon $R = +\infty$ alors que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} -\left(\frac{1}{4}\right)^n x^n$ sont de rayon $R_1 = R_2 = 4$.

3.2. **Multiplication par un scalaire d'une série entière.** Soient $\displaystyle\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ un scalaire non nul. Le produit de cette série par λ est la série entière

$$\sum_n \lambda a_n x^n.$$

Son rayon de convergence est égal à R.

3.3. **Produit de deux séries entières.** Soient $\displaystyle\sum_n a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_n b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement R_1 et R_2. On appelle produit de ces deux séries, la série entière

$$\sum_n c_n x^n$$

avec

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Dans ce cas, le rayon de convergence R de la série produit vérifie

$$R \geq \inf(R_1, R_2).$$

3.4. **Série entière dérivée.**

Définition 3. *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. On appelle série dérivée, la série entière*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

Proposition 1. *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Alors le rayon de convergence de la série dérivée est égal à* R*.*

Démonstration. Montrons que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R. Par hypothèse, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Supposons que cet rayon ait été trouvé par la formule de d'Alembert. On a

$$R^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid .$$

Le terme général de la série dérivée est

$$b_n = (n+1)a_{n+1}.$$

Calculons son rayon

$$\lim_{n \to +\infty} \mid \frac{b_{n+1}}{b_n} \mid = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2) \mid a_{n+2} \mid}{(n+1) \mid a_{n+1} \mid} = R^{-1}$$

et R est aussi le rayon de convergence de la série dérivée.

4. Fonction définie comme somme d'une série entière réelle

Dans ce paragraphe on se propose d'étudier les fonctions définies comme somme d'une série entière, le domaine de définition, les propriétés de dérivabilité, d'intégrabilité.

4.1. **Domaine de définition.** Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R. Sa somme

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

est donc une fonction de la variable x. Son domaine de définition est

- $]-R, R[$ si les séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ divergent,
- $[-R, R[$ si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ diverge et $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ converge,
- $]-R, R]$ si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge et $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ diverge,
- $[-R, R]$ si les séries numériques $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ convergent.

Lorsque les bornes ne seront pas précisées, on notera $(-R, R)$ ce domaine de convergence.

4.2. **Dérivabilité.**

Théorème 2. *Soit* $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergentce* R. *Alors la fonction* f *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et*

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ *est égal à* R.

Démonstration. Nous savons que la série entière dérivée $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R. Pour tout $x \in]-R, R[$ on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sum_{n\geq 0} a_n(x+h)^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n}{h}.$$

Or $(x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \cdots + nh^{n-1}x + h^n$. Ainsi

$$\frac{a_n(x+h)^n - a_n x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \cdots + nh^{n-2}x + h^{n-1}.$$

On en déduit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}.$$

Ainsi f est dérivable sur $]-R, R[$ et a pour dérivée la somme de la série dérivée.

Plus généralement on a

Théorème 3. *La fonction* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *définie sur* $]-R, R[$ *est infiniment dérivable sur* $]-R, R[$ *et la dérivée d'ordre* p *est donnée par*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)\cdots(n+p)a_{n+p}x^n,$$

cette série ayant aussi un rayon de convergence égal à R.

Démonstration. La démonstration est assez analogue à la précédente.

4.3. Intégrabilité.

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ définie sur $]-R, R[$ où R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Nous avons vu que dans le domaine $]-R, R[$ cette fonction est indéfiniment de fois dérivable. Elle est donc en particulier continue et admet une primitive.

Théorème 4. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *définie sur* $]-R, R[$. *Si on note* $\tilde{F}$ *une primitive de* f *sur* $]-R, R[$ *on a, pour* $x_1, x_2 \in]-R, R[$,

$$\tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(u)du = \sum_{n\geq 0} a_n \int_{x_1}^{x_2} u^n du.$$

En particulier, si F *est la primitive s'annulant en* 0, *alors on a*

$$F(x) = \int_0^x f(u)du = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi F est somme de la série entière obtenue en intégrant chacun des termes de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Notons que cette série intégrée, $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a aussi pour rayon de convergence R car sa série dérivée est $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a pour rayon R.

5. Développement en série entière d'une fonction

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié les propriétés de la somme d'une série entière. Dans celui-ci, nous allons regarder les conditions pour qu'une fonction donnée soit la somme d'une série entière qu'il faudra déterminer.

5.1. **Série de Taylor.** Soit $f(x)$ une fonction d'une variable rélle **indéfiniment de fois dérivable**. Cette hypothèse est justifiée par les résultats du paragraphe précédent. Une telle fonction sera dite de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle série de Taylor de f la série entière*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} x^n.$$

Exemples.

- Soit $f(x) = e^x$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'on a $f^p(x) = e^x$. On en déduit la série de Taylor de e^x:
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n.$$
Le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.
- Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Cette fonction est définie pour $x \neq 1$ et dans son domaine de définition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme $f^p(0) = 1$ pour tout $p \geq 1$, la série de Taylor de f est
$$\sum_{n\geq 0} x^n.$$
Son rayon de convergence est $R = 1$

5.2. **Fonctions développables en série entière.**

Définition 5. *Soit f une fonction d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est développable en série entière si f est égale à la somme de sa série de Taylor dans le domaine de convergence de cette série:*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$ où R est le rayon de convergence de la série de Taylor.

Exemples.

- Soit $f(x) = e^x$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière:
$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet soit $S(x)$ la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$. On sait que $S(x)$ est dérivable et sa dérivée est la somme de la série dérivée qui est aussi $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$. On en déduit que $S'(x) = S(x)$. Comme $S(0) = 1$, la fonction $S(x)$ est égale à e^x.
- Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Cette fonction est définie pour $x \neq 1$ et dans son domaine de définition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme $f^{(p)}(0) = 1$, sa série de Taylor est $\sum_{n\geq 0} x^n$. De plus
$$\sum_{n=0}^{p} x^n = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}.$$
Ainsi
$$\sum_{n\geq 0} x^n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} x^n = \lim_{p\to+\infty} \frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$
dès que $x \in]-1,1[$ et $\frac{1}{1-x}$ est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$. Ainsi f est développable en série entière et l'on a
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$
pour tout $x \in]-1,1[$. Notons que f est définie pour tout $x \neq 1$, mais le développement n'est valable que pour $x \in]-1,1[$.
- La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et développable en série entière au voisinage de 0 avec
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \text{pour} \quad x \in]-1,1[.$$
Alors $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ qui est aussi définie sur $\mathbb{R} - 1$ et développable en série entière au voisinage de 0 avec
$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n \quad \text{pour} \quad \mid x \mid \leq 1.$$
- Soit la fonction $f(x) = ln(1+x)$. Pour chercher son dénveloppement en série entière, il est préférable, dans ce cas, de chercher celui de sa dérivée. On a $(ln(1+x))' = \frac{1}{1-x}$. Or $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n\geq 0}(-x)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ pour $-1 \leq -x \leq 1$ donc

pour $\mid x \mid \leq 1$. D'où $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u} du = [\ln(1+u)]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u} du = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n + 1}{n+1}$ pour $\mid x \mid \leq 1$. On en déduit

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \text{ pour } \mid x \mid \leq 1.$$

5.3. **Tableau des développements en séries entières usuels.** Ces développements sont donnés ici avec indication du rayon de convergence.

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \text{ch } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \text{sh } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(6) $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

(7) $\forall x \in]-1,1]$, $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

(8) $\forall x \in [-1,1]$, $\displaystyle \text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et en particulier, $\displaystyle \pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(9) $\forall x \in]-1,1[$, $\forall \alpha \notin \mathbb{N}$, $\displaystyle (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

(10) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $\displaystyle (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n$.

(11) $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle \text{Argth } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.4. **Application. Recherche de solutions d'équations différentielles.** Prenons par exemple une équation différentielle (ED en abrégé) du second ordre linéaire

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Si a, b, c sont des constantes, on a une ED linéraire à coefficients constants. On saît, dans ce cas, trouver toutes les solutions (voir le cours sur les ED).
Si $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions non constantes, on n'a pas de règle générale d'intégration. Une façon de procéder et de chercher s'il existe des solutions $y(x)$ qui s'écrivent sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

c'est à dire qui sont développables en série entière. Les conditions données sur la fonction par l'ED se traduisent par des relations de récurrence sur les coefficients a_n, que l'on doit résoudre. Puis on cherche le rayon de convergence R de la série trouvée $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi sur $]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est solution de l'ED. Si $R = 0$, il n'y pas de solution de l'ED dveloppable en série entière.

Exemple. Soit l'ED linéraire d'ordre 2

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\
y''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

On remplace dans ED

$$\begin{aligned}
xy(x) &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n + \cdots \\
y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\
xy''(x) &= 0 + 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \cdots + (n+1)na_{n+1}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Ainsi en additionnant termes à termes on obtient sachant que $xy'' + y' + xy = 0$:

$$0 = a_1 + (4a_2 + a_0)x + (a_1 + 9a_3 x^2) + \cdots + (a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} + n(n+1)a_{n+1})\, x^n + \cdots$$

On en déduit

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 4a_2 + a_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = \cdots = a_{2p+1} = \cdots = 0 \\ a_{2p} + (2p+2)^2 a_{2p+2} = 0 \text{ pour tout } p \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a_{2p+1} = 0, \\ a_{2p} = -(2p+2)^2 a_{2p+2} = -2^2(p+1)^2 a_{2p+2}, \end{cases}$$

pour tout $p \geq 0$. Ainsi on obtient, par un raisonnement par récurrence

$$\begin{cases} a_{2p+1} = 0, \\ a_{2p+2} = -\dfrac{1}{2^2(p+1)^2} a_{2p} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{4^{p+1}[(p+1)!]^2} a_0, \end{cases}$$

pour tout $p \geq 0$. Donc

$$y(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 x^{2p}$$

est solution de l'ED sur $]-R, R[$ où R est le rayon de convergence de la série entière. (si $R = 0$ cela signifiera qu'il n'existe pas de solution à l'ED développable en série entière). Déterminons R. On a

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 x^{2p} = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 X^p = \sum_{p\geq 0} b_n X^p.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geq 0} b_n X^p$ se calcule en utilisant, par exemple, le critère de d'Alembert puisque $b_n \neq 0$. Comme $\mid b_n \mid = \dfrac{1}{4^p (p!)^2} \mid a_0 \mid$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \frac{b_{n+1}}{b_n} \mid = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4(p+1)^2} = 0.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière en la variable X est $R_1 = +\infty$ et la série

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 x^{2p}$$

converge pour $x^2 \in \mathbb{R}$ donc pour $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence R est donc $+\infty$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 x^{2p}$$

est solution de l'ED donnée.