Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L2 Physique-Chimie

Mathématiques: SERIES ET INTEGRALES

Chapitre 4

Séries de Fourier

Dans le chapitre précédent nous avons vu un exemple particulier de séries de fonctions: les séries entières
$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$
Quand le rayon de convergence d'une série entière était non nul, la somme de cette série entière était une fonction indéfiniment dérivable. On avait aussi regardé à quelles conditions une fonction indéfiniment dérivable était développable en série entière c'est à dire limite d'une suite de fonctions $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. On a aussi vu que le candidat naturel pour son développement en série entière avait pour coefficients $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$. Dans ce chapitre, nous allons voir un autre exemple particulier de séries de fonctions: les séries de Fourier. Nous allons voir quelles sont les propriétés de la somme d'une série de Fourier, et à quelles conditions une fonction peut s'écrire comme somme d'une série de Fourier. La suite $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sera une suite de polynômes trigonométriques et l'étude de ces derniers donnera la forme de la série de Fourier.

1. Fonctions 2π-périodiques et polynômes trigonométriques

1.1. Fonctions 2π-périodiques.

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Elle est 2π-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.*

Exemples

(1) Soit $f(x) = 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction 2π-périodique puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = 4 = f(x)$. Plus généralement $f(x) = c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique.

(2) Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, ou plus généralement $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions 2π-périodiques.

Proposition 1. *L'ensemble des fonctions 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

En effet la somme de deux fonctions 2π-périodique est une fonction 2π-périodique et en mutlipliant une fonction 2π-périodique par un scalaire on a encore une fonction 2π-périodique.

1.2. Polynômes trigonométriques.

Définition 2. *Un polynôme trigonométrique est une fonction du type*

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n+1}^{N} b_n \sin(nx)$$

avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Il est clair qu'un polynôme trigonométrique est une fonction 2π-périodique.

Proposition 1. *Soit $f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n+1}^{N} a_n \sin(nx)$ un polynôme trigonométrique alors*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx, \quad 0 \le n \le N,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\sin(nx)dx, \quad 1 \le n \le N.$$

Démonstration. Elle repose sur les calculs suivants. Supposons que $n \neq m$. Alors

$$\begin{cases} \cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right), \\ \cos(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}\left(\sin((n+m)x) - \sin((n-m)x)\right), \end{cases}$$

et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)dx),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)x)dx),$$

Mais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)dx = 0$$

dès que $p \neq 0$. Ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$$

dès que $n \neq m$. Supposons $n = m$ Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx) = \pi$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \sin((2n)x)dx = 0.$$

On en déduit, pour n tel que $1 \leq n \leq N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2}\cos(nx) + \sum_{m=1}^{N} a_m \cos(mx)\cos(nx) + \sum_{n+1}^{N} b_m \sin(mx)\cos(nx))dx$$

et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)^2 dx = a_n\pi.$$

D'où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx.$$

Le calcul est le même pour les coefficients b_n.

2. Série de Fourier associée à une fonction 2π-périodique f réelle

2.1. **Coefficients de Fourier.**

Définition 3. *Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.*

(1) *On appelle coefficients (réels) de Fourier de f les coefficients*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1.$$

(2) *On appelle série de Fourier (réelle) de f la série trigonométrique*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

On dit que la série de Fourier de f converge en x si $S_{\mathcal{F}}(f)(x) = l$.

Définition 4. *Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.*

(1) *On appelle coefficients (réels) de Fourier de f les coefficients*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \geq 0,$$

(2) *On appelle série de Fourier (exponentielle) de f la série*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$$

Lien entre ces deux définitions: $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} \\ c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)), \quad n \geq 1 \\ (c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)), \quad n \geq 1) \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente?

Existe-t-il un lien entre $S_{\mathcal{F}}$ et f?

Pour montrer qu'une suite est croissante, on doit montrer

2.2. **Propriétés des coefficients de Fourier.**

Proposition 2. *Soit f une fonction 2π-périodique.*

(1) $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1$, *Ainsi on peut calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en intégrant f sur n'importe quelle période de longueur 2π (période de f).*

(2) *Si f est paire, c'est à dire si $f(x) = f(-x)$ pour tout x (le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) alors*

$$\left\{\begin{array}{l} a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0, \\ b_n(f) = 0 \end{array}\right.$$

(3) *Si f est impaire, c'est à dire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x (le graphe de f est symétrique par rapport à O) alors*

$$\left\{\begin{array}{l} a_n(f) = 0 \\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1, \end{array}\right.$$

Démonstration.

(1)

(2) Si f est paire, on a $f(-x) = f(x)$ pour tout x. Alors

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Faisons le changement de variable $t = -x$. On obtient alors

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx = \int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-nt)dt = \int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Ainsi

$$b_n(f) = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

De même

$$\begin{aligned} a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(-nt)d(-t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cos(nt)d(t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \end{aligned}$$

(3) On obtient les résultats énoncés de la même façon.

2.3. **Exemple de calcul de série de Fourier.** Soit f la fonction 2π-périodique, paire définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ pour } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Dessinons le graphe de f. Pour cela traçons le graphe de f sur $[0, \pi]$ puis on fait une symétrie par rapport à Oy car f est paire. On obtient alors le graphe de f sur la période $[-\pi, \pi]$. On utilise ensuite la 2π-périodicité pour compléter le graphe.

Calcul de la série de Fourier de f:

On a, puisque f est paire $b_n(f) = 0$ et

$$\begin{array}{ll} a_n(f) & = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cos(nx)dx] \\ & = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(nx)dx. \end{array}$$

Or $\cos x \cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(x+nx)+\cos(x-nx)] = \frac{1}{2}[\cos((1+n)x)+\cos(n-1)x)]$ d'où, si $n \neq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n,+1)x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n-1)x)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

D'où, pour $n \neq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)\frac{\pi}{2})}{n+1} + \frac{\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\right].$$

Or $\sin(p\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^q \text{ si } p = 2q+1 \\ 0 \text{ si } p = 2q \end{cases}$ Ainsi $a_n(f) = 0$ si $n = 2p+1$ est impair et si $n = 2p$ est pair

$$a_n(f) = a_{2p}(f) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^p}{2p+1} + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right] = \frac{(-1)^p}{\pi}\frac{-2}{4p^2-1}.$$

Calculons $a_1(f)$:

$$a_1(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(2x)+1}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Il reste à calculer $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. La série de Fourier de f est donc

$$\begin{array}{ll} S_{\mathcal{F}}(f)(x) & = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx) \\ & = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{\pi}\frac{-2}{4p^2-1}\cos(2px) \end{array}$$

2.4. **Convergence de la série de Fourier. Théorème de Dirichlet.**

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

La fonction f vérifie les conditions de Dirichlet en x_0 si

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0^-) \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = f(x_0^+) \\ \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0} \text{ existe} \\ \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0} \text{ existe} \end{cases}$$

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement intégrable 2π-périodique. Si f vérifie les conditions de Dirichlet en x_0 alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$, i.e.*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Si de plus f est continue en x_0 alors

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x_0) = f(x_0).$$

Ainsi en les points qui vérifient les conditions de Dirichlet la série de Fourier de f converge, vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. La série de Fourier en x_0 ne converge donc vers $f(x_0)$ que si $f(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ en particulier si f est continue en x_0.

Exemple. Soit la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

On trace le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$. On utilise ensuite la 2π-périodicité pour compléter le graphe. La fonction n'est ni paire, ni impaire. Calculons la série de Fourier de f

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = 0$$

car on a deux aires géoḿetrique de signes opposés. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)\cos(nx)dx + \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(nx)dx \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left(\left[(-\pi - x)\tfrac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \textstyle\int_{-\pi}^{0} \tfrac{\sin(nx)}{n}dx + \left[\tfrac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \tfrac{\sin(nx)}{n}dx\right) \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left(\left[\tfrac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\tfrac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \tfrac{1}{\pi}\left(\tfrac{-1}{n^2} + \tfrac{\cos(-n\pi)}{n^2} + \tfrac{\cos(n\pi)}{n^2} - \tfrac{1}{n^2}\right) \\ &= \tfrac{2(-1)^n - 1)}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On calcule alors, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

On trouve

$$b_n(f) = \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La série de Fourier de f est alors

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x) + \frac{2}{2p+1}\sin((p+1)x)$$

La fonction f vérifie les conditions en $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$ car la fonction f est alors continue et dérivable. Pour les points $x_0 = k\pi$ la fonction est discontinue mais vérifie bien les conditions de Dirichlet. Il suffit de le vérifier en $-\pi, 0$ (pour les autres points on aura le résultat car la fonction est 2π-périodique).

Pour $x_0 = 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(x_0^+)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\pi - x = -\pi = f(x_0^-)$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ et enfin $\lim_{x\to 0^-} \frac{-\pi-x-(-\pi)}{x} = -1$ et f vérifie les conditions de Dirichlet en 0.

Pour $x_0 = -\pi$, on a $\lim_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim_{x\to -\pi^+} -\pi - x = 0 = f(-\pi_0^+)$, $\lim_{x\to -\pi^-} f(x) = \lim_{x\to -\pi^-} x + 2\pi = \pi = f(-\pi^-)$, $\lim_{x\to -\pi^+} \frac{-\pi-x-(0)}{x-\pi} = -1$ et enfin $\lim_{x\to -\pi^-} \frac{x+2\pi-\pi}{x+\pi} = 1$ et f vérifie les conditions de Dirichlet en $-\pi$.

D'après le théorème de Dirichlet pour $x = 0$ qui est un point de discontinuité de f on a

$$S_{\mathcal{F}}(f)(0) == \frac{0+(-\pi)}{2} = \frac{-\pi}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos(0) + \frac{2}{2p+1}\sin(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Remarque. Dans le début du cours, on a pu montrer que cette série numérique ´tait convergente: $\frac{1}{(2p+1)^2} \geq 0$ et $\frac{1}{(2p+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2}$ donc les séries $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4p^2}$ sont de même nature par le critère de comparaison. Or $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ est une série de Riemann convergente et en multipliant par le scalaire $\frac{1}{4}$ on a encore une série convergente. Ainsi la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ est convergente. Mais cela ne permettait pas de trouver sa somme. Ici on a réussi à la déterminer.

Prenons maintenant $x_0 = \frac{\pi}{2}$. C'est un point où f est continue donc

$$S_{\mathcal{F}}(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{2p+1}\sin((p+1)\frac{\pi}{2}),$$

soit

$$S_{\mathcal{F}}(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{2p+1}.$$

On obtient alors

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

2.5. **Formule de Parseval.** Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant les hypothèsse de Dirichlet. Si

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

est sa série de Fourier, alors la série numérique

$$\sum (a_n^2 + b_n^2)$$

converge.

On en déduit la formule de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2 + \cdots$$

Si on considère la série de Fourier exponentielle

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

alors la formule de Parseval s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 \, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mid c_n \mid^2 .$$

En reprenant l'exemple précédent et en lui appliquant la formule de Parseval on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 \, dx &= \tfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x^2 dx + \int_{-\pi}^{0} (\pi^2 + 2\pi x + x^2) dx\right) \\ &= \tfrac{2\pi^2}{3} = \sum \tfrac{16}{\pi^2(2p+1)^4} + \sum \tfrac{4}{(2p+1}^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3} - \sum \frac{4}{(2p+1}^2 = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$