Faculté des Sciences et Techniques

L2 Physique-Chimie et Cycles

Mathématiques : Séries et Intégrales

Cours Elisabeth Remm

TD1

Exercices Séries numériques.

Exercice 1. Etudier la convergence (ou la divergence) des séries de terme général :

(1) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

(2) $u_n = \dfrac{n+1}{n^3+4}$

(3) $u_n = cos(1/n)$

(4) $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$

(5) $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

(6) $u_n = \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

(7) $u_n = (1-\dfrac{1}{n})^n$

Dans chacun des cas, ainsi que dans les exercices suivants, on justifiera clairement les calculs en préxcisant les critères utilisés.

Exercice 2. Rappel de cours : montrer que la série harmonique, c'est-à-dire la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ diverge. En déduire la nature des séries :

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$

Exercice 3. En utilisant les critères de Cauchy ou d'Alembert étudier les séries à termes positifs de terme général

(1) $u_n = \dfrac{2^n}{\ln(n)}$

(2) $u_n = \dfrac{2^n \ln(n)}{3^n}$

(3) $u_n = \left(\dfrac{n+2}{3n+1}\right)^n$

(4) $u_n = \dfrac{n+2}{(3n+1)(n+1)}$.

Exercice 4. Etudier la nature des séries à termes positifs de terme général

(1) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(2) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$

(3) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 5. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carre} \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6. Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 7. Soit (u_n) une suite rélles positives et soit $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 8. Rappeler la définition d'une série alternée et un critère de convergence pour de telles séries. Trouver la nature des séries de terme général

(1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

(2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$

Exercice 9. Trouver la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin n}{3n-1}.$$

Exercice 10. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries de terme général

(1) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

(2) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$

(3) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1}$.

Exercice 11. Etudier la convergence des séries numériques de terme général

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{n+1}{n^3+7}; & \dfrac{n+1}{n^2+7;} & \dfrac{n+1}{n+7;} & \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\
\dfrac{1}{\ln(n^2+2)}; & \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}; & \dfrac{n}{2^n}; & \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n} \\
\dfrac{1}{n!}; & \dfrac{n^{10000}}{n!}; & \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}; & \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \\
(-1)^n\dfrac{n^3}{n!}; & \dfrac{a^n}{n!}; & \sin\left(\dfrac{n^2+1}{n}\pi\right); & \dfrac{\sin n}{n}.
\end{array}$$

Exercice 12. Méditer sur la démonstration de la formule $1+2+3+\cdots+n+\cdots = -1/12$

1. Posons

$$A = 1-1+1-1+1-\cdots$$

Il est clair que l'on a

$$A = 1-1+1-1+1-\cdots = 1-(1-1+1-1+1-\cdots)$$

soit

$$A = 1-A$$

et donc

$$A = 1/2.$$

Soit maintenant

$$B = 1-2+3-4+5-6+7-\cdots$$

On a une série numérique alternée. Mais

$$B = 1-(2-3+4-5+6-7+\cdots)$$

soit

$$B = 1-(1-2+3-4+5-6+7-\cdots)-(1-1+1-1+1-\cdots) = 1-B-A.$$

Comme $A = 1/2$, on en déduit $B = 1/4$.

2. Soit

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$$

On peut écrire

$$S - B = (1+2+3+4+5+\cdots) - (1-2+3-4+5+\cdots) = 2*(2+4+6+8+\cdots) = 4*(1+2+3+\cdots)$$

et donc

$$S = B + 4S$$

ce qui implique

$$S = -B/3 = -1/12.$$

Question : que pensez-vous de cette démonstration ?

source : https ://sciencetonnante.wordpress.com/2013/05/27/1234567-112/