Faculté des Sciences et Techniques

L2 Physique-Chimie et Cycles

Mathématiques : Séries et Intégrales

Cours Elisabeth Remm

TD2

Exercices Séries entières.

Exercice 1.

(1) On considère une série entière rélle ou complexe de type polynomial, c'est-à-dire qui s'écrit $\sum_0^p a_n x^n$. Montrer qu'une telle série entière a un rayon de convergence infini.

(2) Montrer que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et sa fonction somme vaut $\frac{1}{1-z}$ sur le disque ouvert $D(0,1)$.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que

* la série $\sum a_n 4^n$ converge ;

* la série $\sum a_n 7^n$ diverge.

Que peut-on dire du rayon de convergentce de cette série.

Exercice 3. Calcul de rayon de convergence Calculer le rayon de convergence des séries entières rélle suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},\ \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\pi^n} x^n,$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\pi^n} x^{2n} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{2n}} x^n.$

Exercice 4. Calcul du domaine de convergence Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R ainsi que le comportement aux points $x = R$ et $x = -R$ lorsque R est fini.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (ln\ n)^{n/2} x^n.$$

Exercice 5. Somme d'une série entière

(1) Soit la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$.
- Calculer son rayon de convergence R et son domaine de convergence.
- Soit $f(x)$ sa somme. Cette fonction est-elle dérivable ?
- Déterminer la série dérivée. Calculer son rayon de convergence et sa somme. En déduire $f(x)$.

(2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $ds \sum_{n\geq 1} (3n+1)x^{3n}$.

(3) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $ds \sum_{n\geq 1} (2^n + 3^n)x^n$.(On pourra écrire cette série entière comme une somme de ceux séries entières).

Exercice 6. Développement en série entière

(1) Rappeler la définition du développement en série entière d'une fonction $f(x)$ d'une variable rélle dans un intervalle I. Qu'est-ce que le dénveloppement de Taylor lorsque f est indéfiniment dérivable ?

(2) Rappeler le développement en série entière en précisant le domaine de validité des fonctions usuelles suivantes :

$$(1+x)^\alpha, \ \frac{1}{1+x}, \ \frac{1}{1-x}, \ \ln(1+x), \ \ln(1-x), \ \arctan x, \ e^x, \sin x, \ \cos x, \ \tan x, \ \cosh x, \ \sinh x.$$

(3) Développer en série entière les fonctions suivanttes :

$$f_1(x) = e^{-x} \sin x, \ f_2(x) = \ln(x^2 - 5x + 6), \ f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Exercice 7 . Résolution d'équations différentielles. Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$$

a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$