UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année

Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Rappels: calcul intégral

Contents

Introduction:

Le but de ce chapitre est de rappeler les éléments essentiels du calcul intégral nécessaire à ce module: Intégrales à paramètres, intégrales généralisées.

1. Intégrale fonction d'une borne d'intégration

Le point de départ est le théorème fondamental de l'analyse:

Théorème 1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction F définie sur l'intervalle $[a,b]$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ et vérifie $\begin{cases} F(a) = 0 \\ \forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

Exemples.

(1) La première fonction classique ainsi définie est la fonction ln:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

(2) La fonction sinus intégral est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$SI(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Bien faire attention au fait que cette fonction, qui a de nombreuses applications en physique, ne vérifie à priori pas les hypothèses du théorème précédent car $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas définie en 0 donc c'est une intégrale généralisée que nous retrouverons au paragraphe suivant. Mais $lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ donc elle est prolongeable par continuité en 0 et donc sa dérivée est donc égale à $\frac{\sin x}{x}$.

On généralise ce type de fonctions en considérant les intégrales du type

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

où u et v sont des fonctions dérivables à valeurs dans $[a, b]$. Si f est continue, la fonction F est dérivable et on a

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

2. Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \in I \times [a, b] \to f(x, t) \in \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles x et t. Supposons que pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit continue sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x, t)dt$ existe pour tout $x \in I$ et le résultat dépend de x. Considérons alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt.$$

Cette fonction est donc définie sur I. Cherchons les propriétés (continuité, dérivabilité) de cette fonction.

Théorème 2. *On suppose que*

(1) pour tout $t \in [a, b]$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I.
(2) pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[a, b]$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ est continue sur I.

Remarquons que ce résultat est encore vrai dans le cas suivant, plus simple à énoncer:

Proposition 1. *Si f est continue sur $I \times [a, b]$, I étant un intervalle, alors*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est une fonction continue sur I.

Concernant la dérivabilité de F, on a

Théorème 3. *On suppose que*

(1) pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[a, b]$.
(2) f admet une dérivée partielle $\frac{\delta f}{\delta x}$ sur $I \times [a, b]$.
(3) pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[a, b]$.

(4) pour tout $t \in [a,b]$ la fonction $x \mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)$ est continue sur I.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt.$$

De plus F' est continue sur I.

Ce résultat est encore vrai dans le cas suivant, plus simple à énoncer:

Proposition 2. *Si f et sa dérivée partielle $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ sont continues sur $I \times [a,b]$ alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt.$$

Remarques

(1) Ceci se généralise aux intégrales du type $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ où u et v sont des fonctions dérivables sur I. Avec des hypothèses semblables aux théorèmes précédents on a:

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt + v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)).$$

Exemple. Soit $F(x) = \int_x^{2x} \sin(xt)e^{-t^2}dt$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \sin(xt)e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, La fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\cos(xt)e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc F est dérivable et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = \int_x^{2x} t\cos(xt)e^{-t^2}dt + 2\sin(2x^2)e^{-4x^2} - \sin(x^2)e^{-x^2}.$$

(2) Ce résultat se généralise aussi en faisant varier b. Soit $f : (x,t) \in I \times [a,b] \to f(x,t) \in \mathbb{R}$ continue sur $I \times [a,b]$ et supposons que $\frac{\delta f}{\delta x}(x,t)$ soit aussi continue sur $I \times [a,b]$. Considérons pour tout $y \in [a,b]$, la fonction de deux variables $\varphi(x,y)$ définie sur $I \times [a,b]$ par

$$\varphi(x,y) = \int_a^y f(x,t)dt.$$

Cette fonction de deux variables est différentiable (les dérivées partielles $\frac{\delta\varphi}{\delta x}$ et $\frac{\delta\varphi}{\delta y}$ existent et sont continues sur $I \times [a,b]$) et l'on a

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\varphi}{\delta x}(x,y) = \displaystyle\int_a^y \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt \\[2ex] \dfrac{\delta\varphi}{\delta y}(x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

3. Intégrales généralisées

Rappelons la notion d'intégrale généralisée (parfois appelée aussi intégrale impropre).

Soit f une fonction continue d'une variable réelle définie sur l'intervalle $[a,+\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ n'est pas une intégrale classique, on dit que c'est une intégrale généralisée. On dit que cette intégrale généralisée *converge* si la fonction d'une variable réelle F définie sur $[a,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

admet une limite quand x tend vers $+\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt.$$

Si F n'a pas de limite en $+\infty$ on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge*.

On définit de même les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^a f(t)dt$. Soit f une fonction continue d'une variable réelle définie sur l'intervalle $]-\infty,a]$. L'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ est généralisée. Elle converge si la fonction d'une variable réelle F définie sur $]-\infty,a]$ par

$$F(x)=\int_x^a f(t)dt$$

admet une limite quand x tend vers $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt.$$

Si F n'a pas de limite en $-\infty$ on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ diverge.

Remarque. Les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si pour tout $a\in\mathbb{R}$, les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent. Dans ce cas on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^a f(t)dt+\int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

Critères de convergence des intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. En L1 et L2, dans le cours d'analyse, des critères de convergence ont été présentés: critères de convergence pour les fonctions positives, absolue convergence, semi-convergence). On s'y rapportera dès que nécessaire.

On considère également des intégrales généralisées associées à des fonctions qui ne sont pas définies sur des intervalles fermés de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$. Pour tout $x\in[a,b[$ on considère $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors une intégrale généralisée qui converge si la fonction F admet une limite quand x tend vers b

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt.$$

Si F n'a pas de limite en b on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

4. Les fonctions $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt$

On se propose maintenant de regarder les fonctions définies par des intégrales généralisées à paramètre.

Soit $f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times [a,+\infty[$. Supposons que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

converge pour tout $x \in I$. On définit ainsi une fonction

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

définie sur I. On se propose de regarder la continuité et la dérivabilité de cette fonction.

Théorème 4. *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$. *Si*

(1) f *est continue sur* $I \times [a,+\infty[$,
(2) il existe une fonction $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que*
  (a) $\forall x \in I, t \in [a,+\infty[, \ |f(x,t)| \leq g(t)$
  (b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)$ *est convergente,*

alors F *est une fonction continue sur* I.

Le théorème est encore vrai si, au lieu des conditions sur g, on a que pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I il existe une fonction $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ et $t \in [a,+\infty[$:

$$|f(x,t)| \leq g(t)$$

avec $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)$ convergente.

Concernant la dérivabilité, on a le résultat suivant:

Théorème 5. *Supposons que*

(1) l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge pour une valeur* x_0 *appartenant à* I
(2) les fonctions f *et* $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ *sont continues sur* $I \times [a,+\infty[$
(3) il existe une fonction $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *(i.e. positive) telle que*
  (a) $\forall x \in I, t \in [a,+\infty[, \ |\dfrac{\delta f}{\delta x}(x,t)| \leq g(t)$
  (b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)$ *est convergente,*

alors

A) la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *est définie pour tout* $x \in I$

B) la fonction F est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt$$

et est continue sur I.

Remarquons que dans ce théorème on n'a besoin que de supposer la convergence de l'intégrale en un seul point x_0 de I.

Le théorème est encore vrai si, au lieu des conditions sur g, on a que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I il existe une fonction $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et $t \in [a, +\infty[$:

$$|\frac{\delta f}{\delta x}(x,t)| \leq g(t)$$

avec $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)$ convergente.

5. Quelques exemples

5.1. **La fonction de Gauss.** En théorie des probabilités, une intégrale généralisée joue un rôle important précisément dans l'étude des variables aléatoires suivant la loi normale. Il s'agit de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Nous allons voir que l'on peut évaluer cette intégrale généralisée sans pouvoir par ailleurs déterminer une primitive de la fonction e^{-x^2}. Il existe plusieurs approches de cette évaluation. Voici, sans trop de détails, une de ces méthodes d'évaluation.

(1) On fait le changement de variable $u = xy$ avec $y > 0$ jouant ici un rôle de paramètre. On en déduit $du = ydx$ et

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-x^2y^2}ydx.$$

Alors

$$e^{-y^2}A = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1)y^2}ydx$$

.

(2) On intègre par rapport à y cette dernière intégrale, pour $y \in [c, d]$ avec $0 < c < d$

$$A\int_c^d e^{-y^2}dy = \int_c^d \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1)y^2}ydxdy$$

et en intervertissant (attention: utilise un théorème supplémentaire) les deux intégrales dans le second membre, on en déduit, comme on connaît une primitive de la fonction en y: " $e^{-(x^2+1)y^2}y$ ", que

$$A\int_c^d e^{-y^2}dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(x^2+1)y^2}}{-x^2-1}\right]_c^d dx.$$

Si c tend vers 0 et d tend vers $+\infty$ le premier membre tend vers A^2. Il reste à évaluer à la limite le second membre

(3) pour cela, on considère la fonction définie comme une intégrale à paramètre

$$G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(x^2+1)t^2}}{x^2+1} \right] dx.$$

On montre que G est une fonction continue et $G(0)$ est donc égale à $\lim_{t \to 0} G(t)$. On en déduit que

$$G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$$

(4) De même on montre

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = 0.$$

(5) ainsi $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et donc

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5.2. **La fonction sinus intégral.** Comme application des théorèmes précédents on montre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1. Etude des variations d'une fonction définie par une intégrale.

Etudier le sens de variation de la fonction F définie par

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

Correction. Le but n'est pas d'intégrer la fonction mais uniquement de trouver les variations de la fonction F définie par une intégrale.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $t^4+t^2+1>0$ donc $\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ existe et la fonction f définie par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus elle est continue sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions continues. Les fonctions réelles $u(x)=2x$ et $v(x)=x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction F est donc dérivable et

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (2x)'f(2x)-(x)'f(x)=2\frac{1}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\\
&= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\frac{2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}}{2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}}\\
&= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}}\\
&= \frac{-8x^4+3}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\,\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}}
\end{aligned}$$

$F'(x)$ est donc du signe de $-8x^4+3$. Les deux racines réelles de ce polynôme sont $-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ et $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ ainsi

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$		$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$	$+\infty$
F'	$-$	|	$+$	|	$-$
F	$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$

Il faut maintenant déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que les valeurs en $-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ et $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$. Mais la fonction F est une fonction impaire car pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$F(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}=\int_x^{2x}\frac{-du}{\sqrt{u^4+u^2+1}}=-F(x)$$

si on effectue le changement de variable $u=-t$ avec $du=-dt$. On a donc en particulier $F(0)=0$. On a donc simplement besoin de faire la limite en $+\infty$. Pour x suffisamment grand (positif), comme $t\in[x,2x]$, on a

$$4t^4\geq t^4+t^2+1\geq t^4$$

donc

$$0\leq\frac{1}{2t^2}\leq\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leq\frac{1}{t^2}$$

et par croissance de l'intégrale

$$0\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{2t^2}\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{t^2}$$

or

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en faisant la limite quand $x \to +\infty$ on obtient $lim_{x\to+\infty}F(x) = 0^+$ puisque $lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$. La fonction F est donc décroissante de 0^- à $F(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$ puis croissante jusqu'en $F(\sqrt[4]{\frac{3}{4}})$ et enfin décroissante pour tendre à l'infini vers 0^+. On a pu donner les variations de la fonction sans la calculer explicitement.

Exercice 2- Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t$.

(1) Calculer l'intégrale $\int_{-a}^{a} f(t)dt$.
(2) En déduire la limite quand a tend vers $+\infty$ de cette intégrale.
(3) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge-t-elle?
(4) Que peut-on en déduire.

Correction.

(1) Calculer l'intégrale $\int_{-a}^{a} f(t)dt$.

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} = 0$$

(2) En déduire la limite quand a tend vers $+\infty$ de cette intégrale.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

(3) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge-t-elle?
L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ diverge car $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ est divergente

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) = +\infty$$

donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est donc divergente (elle converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ convergent).

(4) Que peut-on en déduire.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

Exercice 3- Le but de l'exercice est de montrer que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1.$$

Soit les deux fonctions
$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

(1) Montrer pourquoi f est dérivable et calculer sa dérivée.
(2) Montrer pourquoi g est dérivable et calculer sa dérivée.
(3) Montrer que $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et que cette constante est $\frac{\pi}{4}$.
(4) Calculer la limite de la fonction g quand x tend vers $+\infty$.
(5) En déduire que
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1.$$

Correction. On peut déjà remarquer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est une fonction convergente. En effet, pour tout $t \geq 1$, on a
$$t^2 \geq t \Rightarrow -t^2 \leq -t$$
et puisque l'exponentielle est croissante on a
$$0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$$
et par croissance de l'intégrale on a pour tout $a \geq 1$
$$\int_1^a e^{-t^2}dt \leq \int_1^a e^{-t}dt$$
On a
$$\int_1^a e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^a = e^{-a} - e^{-1}$$
et donc cette intégrable est convergente. D'après le théorème de comparaison l'intégrale généralisée (la fonction positive $f(t) = e^{-t^2}$ est majorée par une fonction $g(t) = e^{-t}$ avec $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ qui converge donc $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge):
$$\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$$
est convergente, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est aussi convergente.

(1) Montrer pourquoi f est dérivable et calculer sa dérivée.
La fonction $u(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a
$$u'(x) = e^{-x^2}$$
Alors $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

(2) Montrer pourquoi g est dérivable et calculer sa dérivée.
Considérons la fonction
$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathbb{R}\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$$
les fonctions (de 2 variables) Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ définie par
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$
sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

(3) Montrer que $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$ et que cette constante est $\frac{\pi}{4}$. On va montrer que

$$g'(x) = -2u'(x)u(x) = f'(x)$$

Pour $x \neq 0$, posons $v = tx$ alors $dv = xdt$ et

$$\begin{array}{ll} g'(x) & = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2x \int_0^x e^{-x^2(1+\frac{v^2}{x^2})} \frac{dv}{x} \\ & = -2 \int_0^x e^{-x^2-v^2} dv = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} du = -2u(x)u'(x) = -f'(x) \end{array}$$

Ainsi

$$g'(x) + f'(x) = 0$$

pour $x \neq 0$ mais f' et g' sont continues en 0 donc l'égalité est encore vraie en 0. En intégrant on obtient:

$$g(x) + f(x) = C$$

de plus $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = arctan(1) - arctan(0) = -f(0) + C \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = 0 + C$ donc

$$C = \frac{\pi}{4} \text{ et } g(x) = \frac{\pi}{4} - f(x).$$

(4) Calculer la limite de la fonction g quand x tend vers $+\infty$. Les inégalités

$$0 \leq g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

entraine que $\lim_{x+\infty} g(x) = 0$

(5) En déduire que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

On déduit de l'égalité

$$g(x) + f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x+\infty} (g(x) + f(x)) = 0 + \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, comme la fonction $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou encore

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Exercice 4- Le but de l'exercice est de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Pour cela on va considérer la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$$

(1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction F est définie.
(3) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
(4) En admettant que F est continue en 0, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Correction.

(1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

La fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable c'est à dire que qu'on peut l'intégrer sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est généralisée en 0 et en $+\infty$.

En 0: on peut prolonger la fonction par continuité puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (on a $\sin t \sim_0 t$). Ce n'est donc pas une "vraie" intégrale généralisée.

En $+\infty$: Si on majore brutalement on a $|\frac{\sin t}{t}| \leq \frac{1}{t}$ mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}$ est divergente. On procède donc a une intégration par parties: pour $b > 1$

$$\int_1^b \frac{\sin t}{t} dt = -\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

En passant à la limite quand $b \to +\infty$ on a, $\left[\frac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} = 0 - \cos 1$ (puisque c'est le produit d'un fonction bornée $\cos x$ par une fonction $\frac{1}{t}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos t}{t} = 0$). donc les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Comme $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente puisque $2 > 1$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

Remarque: on a aussi obtenu que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = cos(1) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Mais elle cette seconde intégrale génénalisée (convergente) n'est pas beaucoup plus simple à intégrer.

(2) Montrer que la fonction F est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

où $f(x, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$.

Pour $x = 0, F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Comme cette intégrale converge, F est définie en 0.

Pour $x > 0$, on a $|f(x, t)| \leq e^{-xt}$ car pour tout $t \in]0, +\infty[, |\frac{\sin t}{t}| \leq 1$ (on peut faire l'étude de fonction) et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge car

$$\int_0^a e^{-xt} dt = \left[\frac{1}{-x} e^{-xt}\right]_0^a = \frac{1}{-x}(e^{-xa} - 1)$$

et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^a e^{-xt} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc F est définie pour $x > 0$.

(3) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ La fonction $t \to \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$. La dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t e^{-xt}$$

est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $0 < a < A$ et $x \in [a,A]$ on a $|-\sin t e^{-xt}| \leq g(t) = e^{-at}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)$ est bien convergente. C'est vrai pour tous a, A tels que $0 < a < A$ donc c'est vrai pour tout segment de $]0,+\infty[$ Ainsi F est dérivable, de dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin t e^{-xt} dt$$

(4) En déduire une forme explicite de F sur $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ en utilisant le fait que $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \textstyle\int_0^{+\infty} -\sin t e^{-xt} dt = -\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{it}-e^{-it})e^{-xt}dt \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\textstyle\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-xt}dt - \int_0^{+\infty} e^{-it}e^{-xt}dt\right) \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\textstyle\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-(i+x)t}dt\right) \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{(i+x)t}}{i+x}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= -\frac{1}{2i}\left(0 - \frac{1}{i-x} + 0 - \frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-x} + \frac{1}{i+x}\right) = \frac{1}{2i}\frac{i+x+i-x}{(i-x)(i+x)} = \frac{1}{i^2-x^2} = \frac{-1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

D'où

$$F(x) = -arctan(x) + C$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{\pi}{2} + C$$

et

$$|F(x)| = |\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \to_{x\to+\infty} 0$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

on a $C = \frac{\pi}{2}$ et

$$F(x) = -arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

pour $x > 0$.

(5) En admettant que F est continue en 0, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Comme F est continue en 0 on a:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(-arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$