UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année

Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique

Elisabeth REMM

Chapitre 4

Transformation de Laplace

Contents

Introduction:

Dans ce chapitre on va étudier la transformation de Laplace. Elle associe à une fonction f, une fonction complexe $\mathcal{L}(f)$ définie par

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

La nouvelle fonction paraît plus compliquée que la fonction initiale. Mais nous verrons qu'elle a des propriétés "sympathiques" et transforme des équations différentielles en équations linéaires donc plus simples à résoudre et la solution du problème initial sera alors obtenue en faisant la transformée inverse. Cela en fait donc un outil intéressant. Nous verrons donc

(1) la définition de la transformée de Laplace d'une fonction f
(2) les transformées des fonctions usuelles
(3) des règles de calcul qui nous permettront par exemple d'obtenir facilement la transformée de Laplace d'une translatée d'une fonction f à partir de la transformée de la fonction f

1. Transformation de Laplace

Définition 1. (1) *On appelle* **fonction causale** *toute fonction définie dur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.*

(2) *La fonction* **échelon unité** *est la fonction causale $\mathcal{U}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.*

Cela permet de construire une fonction causale g à partir d'une fonction quelconque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$g = f \times \mathcal{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f(t)\mathcal{U}(t).$$

Définition 2. *La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction F (aussi notée $\mathcal{L}(f)$ pour faire référence à la fonction f) de la* **variable complexe** *s définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

La transformée de Laplace n'existe pas forcément pour tout $s \in \mathbb{C}$. On appelle **abscisse de convergence absolue de la transformée de Laplace** le **réel**:

$$\gamma(\mathcal{L}(f)) = inf\{\gamma \in \mathbb{R}; \mathcal{L}(f)(\gamma) \text{ converge absolument}\}$$

On peut avoir éventuellement $\gamma(\mathcal{L}(f)) = -\infty$ ou $+\infty$.

On rappelle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ converge absolument si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(x,t)|\, d$ est convergente. De plus la convergence absolue implique la convergence (simple).

On a alors que, si la partie réelle $Re(s) > \gamma(\mathcal{L}(f))$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge (absolument) et $\mathcal{L}(f)$ est une fonction définie (et même holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{R}; Re(s) > \gamma(\mathcal{L}(f))\}$

2. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, on donne les fonctions réelles, leur transformée de Laplace ainsi que l'abscisse de convergence absolue σ. C'est à dire qu'il y a convergence pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s)$ est supérieur à l'abscisse de convergence absolue on a $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ts}dt$ converge absolument i.e $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-ts}|dt$ converge.

Cette abscisse est aussi appelé abcisse de sommabilité.

Théorème 1. *Si une fonction a pour abscisse de convergence σ alors la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ existe dans tout le demi-plan ouvert $Re(s) > \sigma$.*

fonction f	transformée de Laplace de f	abscisse de convergence absolue
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$e^{at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(a)$
$\sin(at)\mathcal{U}(t) \quad (a>0)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	0
$\cos(at)\mathcal{U}(t) \quad (a>0)$	$\frac{z}{s^2+a^2}$	0
$t^n\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$t^n e^{at}\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$Re(a)$
$t^a\mathcal{U}(t) \quad (Re(a)>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	0

Cela signifie par exemple que la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{5t}\mathcal{U}(t)$ est $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s-5}$ pour $Re(s) > 5$.

Exercice 1: Retrouver les valeurs de ce tableau.

3. Propriétés de la transformée de Laplace

Théorème 2. (1) *La transformée de Laplace est linéaire: pour toutes fonctions causales f et g et pour tous réels a et b on a*

$$\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

(propriété venant de la linéarité de l'intégrale) Cependant il faut faire attention à l'abscisse de convergence absolue.

(2) *Valeurs initiales et valeurs finales*

Soit f une fonction causale telle que f admette une limite en $+\infty$. Alors

$$\lim_{z\to 0} z\mathcal{L}(f)(z) = \lim_{t\to +\infty} f(t)$$

Soit f une fonction causale. Alors

$$\lim_{t\to +\infty} z\mathcal{L}(f)(z) = f(0^+)$$

4. Règles de calcul

La tableau suivant donne les règles qui lie la transformée de Laplace d'une fonction causale et de certaines fonctions qui lui sont associées

fonction f	transformée de Laplace de f	abscisse de convergence absolue
$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	σ
$f(t-a)\quad a>0$ (fonction retard)	$e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$	σ
$f(t)e^{at}$ (multiplication par une exponentielle)	$\mathcal{L}(f)(s-a)$	$\sigma - Re(a)$
$f(at),\quad a>0$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a})$	$a\sigma$
$t^n f(t),\ (n\in\mathbb{N})$	$(-1)^n\left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n)}(s)$	σ
$f'(t)$ (dérivation)	$s\mathcal{L}(f)(s)-f(0^+)$	σ
$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}(f)(s)-s^{n-1}f(0^+)$ $-s^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{n-1}(0^+)$	σ
$\int_0^t f(u)du$ (intégration)	$\frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$	$max(0,\sigma)$

5. Inversion de la transformée de Laplace d'une fonction

Nous verrons dans le paragraphe suivant l'importance de pouvoir calculer la transformée de Laplace inverse.

Pour inverser la transformée de Laplace d'une fonction, on utilise en général les tables et les règles précédentes, en "lisant les tableaux de gauche à droite". Il faut ainsi par exemple faire apparaître des sommes de transformées de Laplace connues ou des translations, des dilatations, etc... Par exemple, pour le calcul de l'inverse de la transformée de Laplace d'une fraction rationnelle, on décompose en éléments simples et on utilise les tableaux.

Remarque: Il existe aussi un théorème d'inversion pour inverser la transformée de Laplace mais on utilise pour le calcul effectif de cette inversion le **théorème des résidus pour des fonctions complexes**. Nous allons ici nous contenter de la première méthode.

Exemples Trouver la fonction de transformée de Laplace

(1)

$$\frac{1}{s^2-s-2}$$

Le dénominateur a-t-il des racines réelles ou non? $\Delta = 9$ donc il a deux racines réelles $(1+3)/2 = 2$ et $(1-3)/2 = -1$ donc

$$\frac{1}{s^2-s-2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

En décomposant en éléments simples on obtient

$$\frac{1}{s^2-s-2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-2}$$

En multipliant par $(s+1)$ et en prenant $s=-1$ on obtient que $a = -1/3$
En multipliant par $(s-2)$ et en prenant $s=2$ on obtient que $b = 1/3$
Or $\frac{1}{(s-\alpha)} = \mathcal{L}(e^{\alpha t}\mathcal{U}(t))(s)$ d'où

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{-1}{3}\mathcal{L}(e^{-t}\mathcal{U}(t))(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}(e^{2t}\mathcal{U}(t))(s)$$

et par linéarité de la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(\frac{-1}{3}e^{-t}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{3}e^{2t}\mathcal{U}(t))(s)$$

d'où

$$f(t) = \frac{-1}{3}e^{-t}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{3}e^{2t}\mathcal{U}(t)$$

Si on veut l'abscisse de convergence absolue, elle est ici donnée par le max des abscisse de Convergence des deux fonctions donc ici l'abscisse de convergence est 0.

(2)

$$\frac{1}{s^2-2s+5}$$

On a $\Delta = 4 - 4\times 5 < 0$ donc le dénominateur n'a pas de racine réelle et on va le mettre sous la forme $(s-1)^2 - 1 + 5 = (s-1)^2 + 4$. On a

$$\mathcal{L}(sin(2t)\mathcal{U}(t))(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

d'où

$$\mathcal{L}(e^t sin(2t)\mathcal{U}(t))(s) = \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

et

$$\mathcal{L}(f(t)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^t sin(2t)\mathcal{U}(t)\right)(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}$$

6. Transformée de Laplace et résolution d'équations différentielles

Nous avons déjà vu que la transformée de Laplace avait des propriétés intéressantes sur la somme et la dérivation. Ceci va nous permettre pour résoudre certaines équations différentielles, de leur appliquer la transformation de Laplace et d'avoir un problème plus simple à résoudre (équation algébrique). Un fois résolu, on applique la transformée de Laplace inverse pour obtenir la solution du problème initial.

Exemple: soit à résoudre, pour tout $t > 0$,

$$f^{(3)}(t) + f''(t) + f'(t) + f(t) = te^t$$

avec $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$. On suppose que f admet une transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ et on applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente ce qui donne

$$z^3F(z) + z^2F(z) + zF(z) + F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z^3+z^2+z+1)} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)(z^2+1)} \\ &= \frac{a}{(z-1)} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{(z+1)} + \frac{d+ez}{(z^2+1)} \end{aligned}$$

On aura alors, une fois les valeurs $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ trouvées, et en utilisant les règles de calculs et tableaux à voir que

$$f(t) = ae^t\mathcal{U}(t) + be^t t\mathcal{U}(t) + ce^{-t}\mathcal{U}(t) + d\sin(t)\mathcal{U}(t) + e\cos(t))\mathcal{U}(t).$$

EXERCICES

Exercice 1. *Calcul de transformée de Laplace.*

Représenter et calculer la transformée de Laplace avec le calcul direct et en utilisant les formules des fonctions suivantes

(1) $f(t) = t\mathcal{U}(t-2)$
(2) $g(t) = (t-2)\mathcal{U}(t-2)$
(3) $h(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$
(4) $k(t) = (t-2)^2\mathcal{U}(t-2)$

Exercice 2 *Fonction triangle.* On considère la fonction causale f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ pour } t \in [0,1], \\ -t+2 \text{ pour } t \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Déterminer l'expression de f sur les intervalles $[0,1], [1,2]$ et $[2,+\infty[$.
(2) Démontrer que

$$f(t) = t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2).$$

(3) En déduire la transformée de Laplace de f.

Exercice 3 *Fonction rampe*

On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0, \\ 2t \text{ pour } t \in [0,1], \\ 2 \text{ pour } t > 1. \end{cases}$$

Calculer la transformée de Laplace

(1) avec la définition
(2) avec le tableau après avoir décomposé le signal en une combinaison de signaux élémentaires (aide: utiliser la fonction $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ est un créneau entre 0 et 1)

Exercice 4. Trouver la fonction f telle que

(1) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$
(2) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 5}$
(3) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s+3}$
(4) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{5s+10}{s^2 + 3s - 4}$
(5) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s-7}{(s-7)^2 + 1}$
(6) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s}{s^2 - 6s + 13}$

Exercice 5. Trouver la fonction f telle que

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}.$$

Exercice 6. Résoudre une équation différentielle

(1) Déterminer a et b tels que
$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1}$$

(2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $\dfrac{s}{(s-1)(s+1)}$.

(3) On considère l'équation différentielle
$$y'(t) + y(t) = e^t \mathcal{U}(t),\ y(0) = 1.$$
Soit y une fonction causale solution de l'équation dont on suppose qu'elle admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}(y)$. Exprimer, en fonction de $\mathcal{L}(y)$, la fonction $\mathcal{L}(y')$ qui la transformée de Laplace de la fonction y'

(4) Démontrer que $\mathcal{L}(y) = \dfrac{s}{(s-1)(s+1)}$

(5) En déduire y.

CORRIGE PARTIEL DES EXERCICES

Exercice 4. *Trouver la fonction f telle que*

(1) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2-s-2}$

On calcul le discriminant de $s^2 - s - 2$: $\Delta = 9$ donc les deux racines réelles de ce polynôme sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$ et

$$s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2).$$

Ainsi

$$\frac{1}{s^2-s-2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-2}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.
En multipliant l'équation par $(s+1)$ et en prenant $s = -1$ on trouve $a = -\frac{1}{3}$. En multipliant l'équation par $(s-2)$ et en prenant $s = 2$ on trouve $b = \frac{1}{3}$. D' où

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2-s-2} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \\ &= -\frac{1}{3}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-t})(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{2t})(s) \\ &= \mathcal{L}(-\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{-t} + \frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{2t})(s) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(t) = -\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{-t} + \frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{2t}.$$

(2) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+5}$

Ici le discriminant de $s^2 - 2s + 5$ est $\Delta = 44 \times 5 < 0$. On a

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2-2s+5} = \frac{1}{(s-1)^2-1+5} = \frac{1}{(s-1)^2+4}.$$

D'après le tableau $\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s) = \frac{2}{s^2+4}$ d'où

$$\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1) = \frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

Finalement

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1) = \frac{1}{s^2+4}$$

Ainsi grâce aux propriétes de la transformée de Laplace on a

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1) = \mathcal{L}(e^t\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s)$$

d'où

$$f(t) = e^t\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t).$$

(3) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{e^-2s}{s+3}$

On sait que $\dfrac{1}{s+3} = \mathcal{L}(e^{-3t}\mathcal{U}(t))(s)$ d'où, d'après le tableau,

$$\frac{e^{-2s}}{s+3} = e^{-2s}\mathcal{L}(e^{-3t}\mathcal{U}(t))(s) = \mathcal{L}(e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2))(s)$$

(on utilise la formule $\mathcal{L}(g(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(g(t))(s)$) Ainsi

$$f(t) = e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$$

(4) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{5s+10}{s^2+3s-4}$

Le polynôme s^2+3s-4 se factorise sous la forme $(s-1)(s+4)$ (on peut par exemple remarquer que 1 est racine évidente). De plus le polynôme au numérateur est bien de degré strictement inférieur au degré du polynôme au dénominateur donc on peut écrire directement la décomposition en éléments simples suivante

$$\frac{5s+10}{s^2+3s-4} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+4}$$

et trouver a (resp. b) en multipliant l'expression par $(s-1)$ (resp. $(s+4)$) et prenant $s=1$ (resp. $s=-4$). Ainsi

$$\frac{5s+10}{s^2+3s-4} = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s+4}$$

Puisque $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s) = \frac{1}{s+4}$ on a

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{5s+10}{s^2+3s-4} = 3\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^t)(s) + 2\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s) = \mathcal{L}(3\mathcal{U}(t)e^t + 2\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s)$$

D'où

$$f(t) = 3\mathcal{U}(t)e^t + 2\mathcal{U}(t)e^{-4t}$$

(5) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s-7}{(s-7)^2+1}$

On a

$$\mathcal{L}(cos(t)\mathcal{U}(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

donc

$$\mathcal{L}(cos(t)\mathcal{U}(t))(s-7) = \frac{s-7}{(s-7)^2+1}$$

mais $\mathcal{L}(e^{at}g(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s-a)$ donc

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s-7}{(s-7)^2+1} = \mathcal{L}\left(e^{7t}cos(t)\mathcal{U}(t)\right)(s)$$

d'où

$$f(t) = e^{7t}cos(t)\mathcal{U}(t).$$

(6) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s}{s^2 - 6s + 13}$

Ici le discriminant du polynôme $s^2 - 6s + 13$ est négatif donc on écrit

$$s^2 - 6s + 13 = (s-3)^2 - 9 + 13 = (s-3)^2 + 4$$

Alors

$$\frac{s}{s^2 - 6s + 13} = \frac{s}{(s-3)^2 + 4}$$

On veut maintenant faire apparaître du tableau et pour cela on écrit $s = s - 3 + 3$ (à cause du $s - 3$ du dénominateur) d'où

$$\frac{s}{s^2 - 6s + 13} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} + \frac{3}{(s-3)^2 + 4}$$

qui fait apparaître un terme lié à la transformée de Laplace du cosinus et l'autre à la transformée de Laplace du sinus. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \frac{s}{s^2 - 6s + 13} \\
&= \frac{s-3}{(s-3)^2 + 2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(s-3)^2 + 2^2} \\
&= \mathcal{L}(cos(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) + \frac{3}{2}\mathcal{L}(sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) \\
&= \mathcal{L}(cos(2t)\mathcal{U}(t) + \tfrac{3}{2}sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) \\
&= \mathcal{L}\left(e^{3t}cos(2t)\mathcal{U}(t) + \tfrac{3}{2}e^{3t}sin(2t)\mathcal{U}(t)\right)(s)
\end{aligned}$$

et

$$f(t) = e^{3t}cos(2t)\mathcal{U}(t)\frac{3}{2}e^{3t}sin(2t)\mathcal{U}(t)$$

Exercice 5. *Trouver la fonction f telle que*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}.$$

On trouve

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t sin(2t)\mathcal{U}(t)$$

En effet

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4} = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2 + 1}$$

Or $\mathcal{L}(sint\,\mathcal{U}(t))(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ d'où

$$\mathcal{L}(sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{s}{2})^2 + 1}$$

d'où

$$\mathcal{L}(e^t sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2 + 1}$$

et

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}e^t sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2 + 1}$$

D'où le résultat puisque $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(2t)$.

On peut aussi faire

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^2 + 4}$$