UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année
Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique

Elisabeth REMM

Révisions : Exercices corrigés

Contents

1. EXERCICES Fourier

1.1. **Exercice 1.** *Calcul de transformée de Fourier.* Pour $\alpha > 0$ on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$

(1) Calculer la transformée de Fourier de f

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ixt}dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$$

On peut la recalculer (fait en cours) ou la retrouver par le calcul.

Calcul direct:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ixt}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha|x|}e^{-ixt}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ixt}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}e^{-ixt}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}e^{-ixt}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{x(\alpha-it)}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(\alpha+it)}dx \\
&= \left[\frac{e^{x(\alpha-it)}}{\alpha-it}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x(\alpha+it)}}{-\alpha-it}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha-it} - \underset{x\to-\infty}{lim}\frac{e^{x(\alpha-it)}}{\alpha-it} + \underset{x\to+\infty}{lim}\frac{e^{-x(\alpha+it)}}{\alpha+it} - \frac{1}{-\alpha-it}
\end{aligned}$$

Mais $\underset{x\to-\infty}{lim}\frac{e^{x(\alpha-it)}}{\alpha-it} = \underset{x\to-\infty}{lim}\frac{e^{\alpha x}e^{-ixt}}{\alpha-it}$ et puisque $\underset{x\to-\infty}{lim}e^{\alpha x} = \underset{u\to+\infty}{lim}e^{-\alpha u} = 0$ car $\alpha > 0$, e^{-ixt} est une fonction bornée ($t, x \in \mathbb{R}$ et $|e^{-ixt}| \le 1$) et $\frac{1}{\alpha-it}$ est une constante, on a $\underset{x\to-\infty}{lim}\frac{e^{x(\alpha-it)}}{\alpha-it} = 0$

De même $\underset{x\to+\infty}{lim}\frac{e^{-x(\alpha+it)}}{\alpha+it} = 0$

Donc

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\alpha-it} + \frac{1}{\alpha+it} = \frac{\alpha+it+\alpha-it}{\alpha^2+t^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$$

(2) Déterminer la transformée de Fourier de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ à l'aide de la formule d'inversion.

Théorème 1. *Si f est continue et $\hat{f}$ est integrable (i.e $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(x)\right|dx$ est convergente alors*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

(Attention aux variables aux variables: si on a f en fonction de x, il faut prendre une variable d'intégration différente, par exemple t et intégrer $\hat{f}(t)e^{ixt}$ par rapport t)

Ainsi

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{-ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f}(t))(x)$$

Ceci permet alors de trouver

$$\mathcal{F}(\hat{f}(t))(x) = 2\pi f(-x)$$

Si on veut écrire ceci en fonction de la variable t

$$\mathcal{F}(\hat{f}(x))(t) = 2\pi f(-t)$$

ou plus simplement

$$\mathcal{F}(\hat{f})(t) = 2\pi f(-t)$$

On va donc tout d'abord montrer que l'on peut appliquer la formule d'inversion à la fonction f. La fonction f est continue et on peut montrer que $\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} \right| dx$$

est convergente. Pour cela il suffit de constater que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} \right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx$$

La deuxième intégrale est simplement l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$ donc c'est une intégrale convergente. La dernière intégrale converge car

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\alpha}{x^2}$$

et les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ est une intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$ qui est convergente pour $a > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge et aussi $\int_1^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}$ par le théorème d'équivalence.

La fonction $\hat{f}(x) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}$ est paire donc

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} dx$$

est aussi convergente.

Alors la formule de réciprocité s'applique est on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

ce qui peut encore s'écrire

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(x)$$

d'où

$$\mathcal{F}(\hat{f})(x) = 2\pi k(-x)$$

Ainsi

$$\mathcal{F}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2} \right)(x) = 2\pi e^{\alpha|-x|} = 2\pi e^{\alpha|x|}.$$

En prenant $\alpha = 1$ on a $\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)(x) = 2\pi e^{|x|}$ et d'après la linéarité de la transformée de Fourier, on a $2\mathcal{F}(\frac{1}{1+t^2})(x) = 2\pi e^{|x|}$ soit

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(t) = \pi e^{|x|}$$

(3) Calculer le produit de convolution $f * f$

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-y|}e^{-\alpha|y|}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(|x-y|+|y|)}dy$$

Si $x > 0$ on a

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha(x-2y)}dy + \int_{0}^{x} e^{-\alpha x}dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-\alpha(2y-x)}dy$$

(quand x est positif: soit y négatif, on a $|x-y|$ qui est positif et donc $|x-y| = x-y$ et $|y| = -y$; soit y est positif mais inférieur à x donc $|x-y| = x-y$ et $|y| = y$; soit y est positif mais supérieur à x donc $|x-y| = -x+y$ et $|y| = y$ d'où les différent résultats)

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha} + xe^{-\alpha x} + e^{\alpha x}\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha} = e^{-\alpha x}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right).$$

En effet

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha(x-2y)}dy = \left[\frac{e^{-\alpha(x-2y)}}{2\alpha}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha} - \lim_{Y\to-\infty}\frac{e^{-\alpha(x-2Y)}}{2\alpha} = \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}$$

car $-\alpha(x-2Y) \underset{Y\to-\infty}{=} -\infty$ puisque $\alpha > 0$ (x est fixé) et donc

$$\lim_{Y\to-\infty} e^{-\alpha(x-2Y)} = 0.$$

D'autre part

$$\int_{0}^{x} e^{-\alpha x}dy = e^{-\alpha x}\int_{0}^{x} dy = e^{-\alpha x}\,[y]_0^x = xe^{-\alpha x}$$

Et enfin

$$\int_{x}^{+\infty} e^{-\alpha(2y-x)}dy = e^{\alpha x}\int_{x}^{+\infty} e^{-2\alpha y}dy = e^{\alpha x}\left[\frac{e^{-2\alpha y}}{-2\alpha}\right]_{x}^{+\infty} = e^{\alpha x}\frac{0-e^{-2\alpha x}}{-2\alpha} = \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}$$

Mais f est paire et on peut montrer que cela entraîne que $f * f$ aussi est paire (en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)dy$$

d'où

$$\begin{aligned}(f*f)(-x) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-y)f(y)dy \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)f(y)dy \text{ (car } f \text{ est paire)} \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(u-x)du \quad \text{(en faisant le changement de variable } u = x+y) \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(x-u)du \text{ (car } f \text{ est paire)} \\ &= (f*f)(x)\end{aligned}$$

donc

$$(f * f)(x) = e^{-\alpha|x|}\left(|x| + \frac{1}{\alpha}\right)$$

On a alors

$$\mathcal{F}(f * f)(t) = \mathcal{F}(f)(t)\mathcal{F}(f)(t)$$

donc

$$\widehat{f * f}(t) = \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2}\right)^2 = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + t^2)^2}$$

On peut appliquer le théorème d'inversion car $g = (f * f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (par composée, somme, produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et $\hat{g} = \mathcal{F}(f * f)$ est intégrable puisque

$$\left|\frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + t^2)^2}\right| = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4\alpha^2}{t^4}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge. On a un résultat similaire en $-\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^2}\right| dt$ converge.

Avec le théorème d'inversion on a,

$$g(-x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{g}(t))(x)$$

d'où

$$(f * f)(-x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\widehat{f * f})(x)$$

donc

$$\mathcal{F}\left((\widehat{f * f})(t)\right)(x) = \mathcal{F}\left(\frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + t^2)^2}\right)(x) = 2\pi e^{-\alpha|-x|}\left(|-x| + \frac{1}{\alpha}\right) = 2\pi e^{-\alpha|x|}\left(|x| + \frac{1}{\alpha}\right)$$

On en déduit

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1 + t^2)^2}\right) = \frac{1}{4} \times 2\pi e^{-|x|}\left(|x| + 1\right) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}\left(|x| + 1\right).$$

(4) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Le calcul direct (passant par un calcul d'intégrale) serait compliqué. Mais on peut remarquer qu'on a à peu de choses près (à une constante près) $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ la dérivée de $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{u(x)}$ dont on connaît la transformée de Fourier.

$$h(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{-2} \times \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(h(x)\right)(t) &= \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)'\right)(t) \\
&= -\frac{1}{2} \times \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)'\right)(t) = -\frac{1}{2} \times \mathcal{F}\left(k'\ \right)(t) \\
&= -\frac{1}{2}it \times \mathcal{F}\left(k\right)(t) = -\frac{1}{2}it \times \mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)(t) \\
&= -\frac{it\pi}{2}e^{-|t|}
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser que si g et $xg(x)$ sont intégrables alors

$$\mathcal{F}(xg(x))(t) = i\hat{g}'(t)$$

i.e que la transformée de Fourier de la fonction $xg(x)$ est égale à i fois la dérivée de la transformée de Fourier de g

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x \times \tfrac{1}{(1+x^2)^2}\right)(t) &= i\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(t)\right) \\ &= i\tfrac{\pi}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\alpha|t|}\left(|t|+1\right)\right)\end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\mathcal{F}\left(x \times \tfrac{x}{(1+x^2)^2}\right)(t) \quad = -\frac{it\pi}{2}e^{-|t|}.$$

En effet si on note $f_1(t) = e^{-\alpha|t|}\left(|t|+1\right)$ alors pour $t \geq 0$ on a $f_1(t) = e^{-\alpha|t|}\left(|t|+1\right) = e^{-\alpha t}\left(t+1\right)$ et donc sa dérivée est

$$f_1'(t) = -e^{-\alpha t}\left(t+1\right) + e^{-\alpha t} = -te^{-\alpha t}$$

et pour $t \leq 0$ on a $f_1(t) = e^{-\alpha|t|}\left(|t|+1\right) = e^{\alpha t}\left(-t+1\right)$ et donc sa dérivée est

$$f_1'(t) = e^{\alpha t}\left(-t+1\right) - e^{\alpha t} = -te^{\alpha t}$$

donc $f_1(t) = -te^{-\alpha|t|}$.

ATTENTION dans tout cet exercice à ne pas se tromper dans les variables (d'intégration et autres).

ATTENTION également à ne pas confondre la dérivée de la transformée de Fourier d'une fonction avec la transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction.

2. EXERCICES Laplace

2.1. **Exercice 1.** *Calcul de transformée de Laplace.* Représenter et calculer la transformée de Laplace avec le calcul direct et en utilisant les formules des fonctions suivantes

(1) $f(t) = t\mathcal{U}(t-2)$
Avec le calcul direct on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_2^{+\infty} e^{-st}tdt = [\frac{1}{-s}te^{-st}]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty}\frac{1}{s}e^{-st}tdt \\ &= \frac{1}{s}2e^{-2s} + \frac{1}{-s^2}[e^{-st}]_2^{+\infty} = \frac{1}{s}2e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}\end{aligned}$$

car $\lim_{t\to+\infty} te^{-st} = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-st} = 0$ si $Re(s) > 0$ puisque $s = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $e^{-st} = e^{-at}e^{-ibt}$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-at} = 0$ si $a > 0$ et e^{-ibt} est bornée.

A l'aide du tableau, on a $\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) = \frac{1}{s^2}$ donc

$$\mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2))(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

Puisque

$$f(t) = t\mathcal{U}(t-2) = (t-2)\mathcal{U}(t-2) + 2\mathcal{U}(t-2)$$

et que la transformée de Laplace est linéaire, on a

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(s) = \mathcal{L}\left((t-2)\mathcal{U}(t-2)\right)(s) + 2\mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t-2)\right)(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2} + 2e^{-2s}\frac{1}{s}$$

(2) $g(t) = (t-2)\mathcal{U}(t-2)$
On a vu ci-dessus que

$$\mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2))(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2}$$

Avec la définition, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g(t))(s) &= \mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt = \int_2^{+\infty}(t-2)e^{-st}dt \\ &= [(t-2)\tfrac{1}{-s}e^{-st}]_2^{+\infty} + \tfrac{1}{s}\int_2^{+\infty} e^{-st}dt = 0 - \tfrac{1}{s^2}[e^{-st}]_2^{+\infty} = \tfrac{e^{-2s}}{s^2}\end{aligned}$$

(3) $h(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$ La fonction h est égale à 1 sur $[1, 3[$ et 0 ailleurs donc le calcul direct donne

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}h(t)dt = \int_1^3 e^{-st}dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_1^3 = \frac{1}{-s}\left(e^{-3s} - e^{-s}\right)$$

On a, en utilisant la linéarité de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = \mathcal{L}(\mathcal{U}(t-1))(s) - \mathcal{L}(\mathcal{U}(t-3))(s) = e^{-s}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)(s) - e^{-3s}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))(s) = (e^{-s} - e^{-3s})\frac{1}{s}$$

(4) $k(t) = (t-2)^2\mathcal{U}(t-2)$
Par le calcul direct on a, puisque la fonction est égale à $t-2$ sur $[2, +\infty[$ et nulle ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(k(t))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}k(t)dt = \int_2^{+\infty} e^{-st}(t-2)^2dt \\
&= [(t-2)^2\frac{1}{-s}e^{-st}]_2^{+\infty} + \frac{2}{s}\int_2^{+\infty} e^{-st}(t-2)dt \\
&= 0 - [\frac{2}{-s^2}(t-2)e^{-st}]_2^{+\infty} + \frac{2}{s^2}\int_2^{+\infty} e^{-st}dt \\
&= 0 - [\frac{2}{s^3}e^{-st}]_2^{+\infty} = \frac{2}{s^3}e^{-2s}
\end{aligned}$$

D'après le tableau, on a

$$\mathcal{L}(k(t))(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(t^2\mathcal{U}(t))(s) = e^{-2s}\frac{2}{s^3}$$

2.2. **Exercice 2.** *Fonction triangle.* On considère la fonction causale f définie par

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ pour } t \in [0, 1], \\ -t+2 \text{ pour } t \in [1, 2] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Démontrer que

$$f(t) = t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2).$$

On peut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t) = t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2)$ et ainsi prendre t dans chaque intervalle et constater l'égalité.

On peut aussi utiliser le fait que pour $0 < a < b$ la fonction $\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)$ est un créneau entre a et b donc $f_1(t) = t(\mathcal{U}(t-0) - \mathcal{U}(t-1))$ est la fonction égale à t sur $[0, 1[$ et nulle ailleurs. De même, on a $f_2(t) = (-t+2)(\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2))$ est la fonction égale à t sur $[1, 2[$ et nulle ailleurs. Alors $f = f_1 + f_2$ et

$$\begin{aligned}
f(t) = \ & t(\mathcal{U}(t-0) - \mathcal{U}(t-1)) + (-t+2)(\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)) \\
&= t\mathcal{U}(t) + (-2t+2)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2)) \\
&= t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2))
\end{aligned}$$

(2) En déduire la transformée de Laplace de f. En utilisant la linéarité de la transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) - 2\mathcal{L}((t-1)\mathcal{U}(t-1))(s) + \mathcal{L}((t-2)\mathcal{U}(t-2))(s) \\
&= \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) - 2e^{-s}\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) + e^{-2s}\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) \\
&= (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}
\end{aligned}$$

2.3. **Exercice 3.** *Fonction rampe***.** On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0, \\ 2t \text{ pour } t \in [0,1], \\ 2 \text{ pour } t > 1. \end{cases}$$

Calculer la transformée de Laplace

(1) avec la définition on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} 2t dt + \int_1^{+\infty} 2e^{-st} dt \\ &= [(2t \frac{1}{-s} e^{-st}]_0^1 + \frac{2}{s} \int_0^1 e^{-st} dt + \frac{2}{-s} [e^{-st}]_1^{+\infty} \\ &= 2\frac{1}{-s} e^{-s} - \frac{2}{s^2} [e^{-st}]_0^1 + \frac{2}{s} e^{-s} \\ &= -\frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s^2} = \frac{2(1-e^{-s})}{s^2} \end{aligned}$$

(2) avec le tableau après avoir décomposé le signal en une combinaison de signaux élémentaires (aide: utiliser la fonction $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ est un créneau entre 0 et 1) On procède comme dans l'exercice précédent

$$\begin{aligned} f(t) = \ & 2t(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)) + 2\mathcal{U}(t-1) \\ & 2t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= 2\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) - 2\mathcal{L}((t-1)\mathcal{U}(t-1))(s) \\ &= 2\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) - 2e^{-s}\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) \\ &= 2(1-e^{-s})\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t))(s) = 2\frac{1-e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

2.4. **Exercice 4.** *Trouver une fonction à partir de sa transformée de Laplace***.** *Trouver la fonction f telle que*

(1) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$

On calcul le discriminant de $s^2 - s - 2$: $\Delta = 9$ donc les deux racines réelles de ce polynôme sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$ et

$$s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2).$$

Ainsi

$$\frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-2}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En multipliant l'équation par $(s+1)$ et en prenant $s=-1$ on trouve $a=-\frac{1}{3}$. En multipliant l'équation par $(s-2)$ et en prenant $s=2$ on trouve $b=\frac{1}{3}$. D' où

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2-s-2} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}\\ &= -\frac{1}{3}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-t})(s)+\frac{1}{3}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{2t})(s)\\ &= \mathcal{L}(-\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{-t}+\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{2t})(s)\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(t)=-\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{-t}+\frac{1}{3}\mathcal{U}(t)e^{2t}.$$

(2) $\mathcal{L}(f)(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+5}$

Ici le discriminant de s^2-2s+5 est $\Delta=44\times 5<0$. On a

$$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}=\frac{1}{(s-1)^2-1+5}=\frac{1}{(s-1)^2+4}.$$

D'après le tableau $\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s)=\frac{2}{s^2+4}$ d'où

$$\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1)=\frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

Finalement

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1)=\frac{1}{(s-1)^2+4}$$

Ainsi grâce aux propriétes de la transformée de Laplace on a

$$\mathcal{L}(f(t))(s)=\mathcal{L}(\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-1)=\mathcal{L}(e^t\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t))(s)$$

d'où

$$f(t)=e^t\frac{1}{2}\sin(2t)\mathcal{U}(t).$$

(3) $\mathcal{L}(f)(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s+3}$

On sait que $\dfrac{1}{s+3}=\mathcal{L}(e^{-3t}\mathcal{U}(t))(s)$ d'où, d'après le tableau,

$$\frac{e^{-2s}}{s+3}=e^{-2s}\mathcal{L}(e^{-3t}\mathcal{U}(t))(s)=\mathcal{L}(e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2))(s)$$

(on utilise la formule $\mathcal{L}(g(t-a))(s)=e^{-as}\mathcal{L}(g(t))(s)$) Ainsi

$$f(t)=e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$$

(4) $\mathcal{L}(f)(s)=\dfrac{5s+10}{s^2+3s-4}$

Le polynôme s^2+3s-4 se factorise sous la forme $(s-1)(s+4)$ (on peut par exemple remarquer que 1 est racine évidente). De plus le polynôme au numérateur est bien de degré strictement inférieur au degré du polynôme au dénominateur donc on peut écrire directement la décomposition en éléments simples suivante

$$\frac{5s+10}{s^2+3s-4} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+4}$$

et trouver a (resp. b) en multipliant l'expression par $(s-1)$ (resp. $(s+4)$) et prenant $s=1$ (resp. $s=-4$). Ainsi

$$\frac{5s+10}{s^2+3s-4} = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s+4}$$

Puisque $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^t)(s) = \frac{1}{s-1}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s) = \frac{1}{s+4}$ on a

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{5s+10}{s^2+3s-4} = 3\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^t)(s) + 2\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s) = \mathcal{L}(3\mathcal{U}(t)e^t + 2\mathcal{U}(t)e^{-4t})(s)$$

D'où

$$f(t) = 3\mathcal{U}(t)e^t + 2\mathcal{U}(t)e^{-4t}$$

(5) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s-7}{(s-7)^2+1}$

On a

$$\mathcal{L}(cos(t)\mathcal{U}(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

donc

$$\mathcal{L}(cos(t)\mathcal{U}(t))(s-7) = \frac{s-7}{(s-7)^2+1}$$

mais $\mathcal{L}(e^{at}g(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s-a)$ donc

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s-7}{(s-7)^2+1} = \mathcal{L}\left(e^{7t}cos(t)\mathcal{U}(t)\right)(s)$$

d'où

$$f(t) = e^{7t}cos(t)\mathcal{U}(t).$$

(6) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{s}{s^2-6s+13}$

Ici le discriminant du polynôme $s^2-6s+13$ est négatif donc on écrit

$$s^2-6s+13 = (s-3)^2-9+13 = (s-3)^2+4$$

Alors

$$\frac{s}{s^2-6s+13} = \frac{s}{(s-3)^2+4}$$

On veut maintenant faire apparaître du tableau et pour cela on écrit $s = s-3+3$ (à cause du $s-3$ du dénominateur) d'où

$$\frac{s}{s^2-6s+13} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} + \frac{3}{(s-3)^2+4}$$

qui fait apparaître un terme lié à la transformée de Laplace du cosinus et l'autre à la transformée de Laplace du sinus. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \frac{s}{s^2-6s+13} \\
&= \frac{s-3}{(s-3)^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(s-3)^2+2^2} \\
&= \mathcal{L}(cos(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) + \frac{3}{2}\mathcal{L}(sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) \\
&= \mathcal{L}(cos(2t)\mathcal{U}(t) + \tfrac{3}{2}sin(2t)\mathcal{U}(t))(s-3) \\
&= \mathcal{L}\left(e^{3t}cos(2t)\mathcal{U}(t) + \tfrac{3}{2}e^{3t}sin(2t)\mathcal{U}(t)\right)(s)
\end{aligned}$$

et

$$f(t) = e^{3t}cos(2t)\mathcal{U}(t) + \frac{3}{2}e^{3t}sin(2t)\mathcal{U}(t)$$

2.5. **Exercice 5.** *Même exercice. Trouver la fonction f telle que*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}.$$

On trouve

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t sin(2t)\mathcal{U}(t)$$

En effet

$$\frac{1}{s^2-2s+5} = \frac{1}{(s-1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2+1}$$

Or $\mathcal{L}(sint\,\mathcal{U}(t))(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ d'où

$$\mathcal{L}(sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{s}{2})^2+1}$$

d'où

$$\mathcal{L}(e^t sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2+1}$$

et

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}e^t sin(2t)\,\mathcal{U}(2t))(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{s-1}{2})^2+1}$$

D'où le résultat puisque $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(2t)$.

On peut aussi faire

$$\frac{1}{s^2-2s+5} = \frac{1}{(s-1)^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

2.6. **Exercice 6.** *Résolution d'équations différentielles.* Résoudre une équation différentielle

(1) Déterminer a et b tels que
$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1}$$
En multipliant par $s-1$ et en prenant $s=1$ on trouve $a = \frac{1}{2}$ et en multipliant par $s+1$ et en prenant $s=-1$ on trouve $b = \frac{1}{2}$. Ainsi On a
$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}.$$

(2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $\dfrac{s}{(s-1)(s+1)}$.
$$\begin{aligned} \tfrac{s}{(s-1)(s+1)} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))(s-1) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))(s+1) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^t\mathcal{U}(t))(s) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}\mathcal{U}(t))(s) \\ &= \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}e^t\mathcal{U}(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\mathcal{U}(t))(s) \end{aligned}$$
Donc la fonction causale dont la transformée de Laplace est $\frac{s}{(s-1)(s+1)}$ est la fonction $\frac{1}{2}e^t\mathcal{U}(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{U}(t)$

(3) On considère l'équation différentielle
$$y'(t) + y(t) = e^t\mathcal{U}(t), \; y(0) = 1.$$
Soit y une fonction causale solution de l'équation dont on suppose qu'elle admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}(y)$. Exprimer, en fonction de $\mathcal{L}(y)$, la fonction $\mathcal{L}(y')$ qui la transformée de Laplace de la fonction y'
$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y)(s) - 1$$

(4) Démontrer que $\mathcal{L}(y)(s) = \dfrac{s}{(s-1)(s+1)}$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation
$$y'(t) + y(t) = e^t\mathcal{U}(t)$$
on obtient
$$s\mathcal{L}(y)(s) - 1 + \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s-1}.$$
Ainsi $(s+1)\mathcal{L}(y)(s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$ soit
$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}.$$

(5) En déduire y.

On a $y(t) = \frac{1}{2}e^t\mathcal{U}(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{U}(t)$.

3. EXERCICES :Distributions

3.1. **Exercice 1.***Distributions régulières***.** Soit $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = 1$$

et soit H la fonction de Heaviside c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que les distributions régulières associées à ces deux fonctions sont égales sur $]0, +\infty[$.

La distribution associée à la fonction H est la distribution T_H définie pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ par

$$< T_H, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \cdot \phi(x)dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx.$$

(définition de la distribution associée à une fonction)

La distribution associée à la fonction $\mathbb{1}$ est la distribution $T_{\mathbb{1}}$ définie pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ par

$$< T_{\mathbb{1}}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx$$

Mais les deux distributions T_H et $T_{\mathbb{1}}$ sont égales sur $]0, +\infty[$ car elles coincident pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R}-]0, +\infty[= \mathbb{R}^-$. En effet: pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R}-]0, +\infty[= \mathbb{R}^-$ on a

$$< T_{\mathbb{1}}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx =< T_H, \phi > .$$

3.2. **Exercice 2.***Support d'une distribution***.** Calculer le support de δ_a et du peigne de Dirac.

Pour toute fonction de $\mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R} - \{a\} =] - \infty, a] \bigcup]a, = \infty[$ (c'est bien un ouvert par réunion de deux ouverts) on a $< \delta_a, \phi >= \phi(a) = 0$ et c'est le plus grand ouvert sur lequel δ_a est nulle puisque si on prend une fonction ϕ qui n'est pas nulle en a, alors $< \delta_a, \phi >= \phi(a) \neq 0$. Le support de δ_a est donc le complémentaire de $\mathbb{R} - \{a\} = \{a\}$ (c'est bien un fermé).

Le support du peigne de Dirac est $\mathbb{Z}$ car si on prend une fonction ϕ qui est nulle $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$, alors $< III, \phi >= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(i) 0$ c'est le plus grand. (sinon on devrait pouvoir ajouter au moins un $n_0 \in \mathcal{Z}$ mais pour la fonction ϕ égale à 0 partout sauf en n_0 où elle est égale à 1 (et qui appartient bien à $\mathcal{D}$on a $< III, \phi >= \phi(n_0) = 1 \neq 0$ donc $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$ est bien le plus grand ouvert sur lequel III est nulle et $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[= \mathbb{Z}$ est le support de III.

3.3. **Exercice 3.** *Fonction localement intégrable***.** Démontrer que la fonction $\ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ il faut montrer que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_a^b |\ln|x||dx$$

est convergente. Il faut différencier les cas où $0 \notin [a,b]$ de ceux où $0 \in [a,b]$. En effet si $0 \notin [a,b]$ alors la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[a,b]$ (composée de fonctions continues) et donc intégrable et l'intégrale $\int_a^b |\ln|x||dx$ est convergente (c'est le cas par exemple si $0 < a$ $[a,b] = [\frac{1}{2}, 3]$, mais aussi si [a,b]=[-5,-2] où l'on a $\int_{-5}^{-2} \ln(-x)dx = \int_2^5 \ln x dx$. On intègre aussi ici une fonction continue sur $[2,5]$).

Si $0 \in [a,b]$ alors on a

$$\int_a^b |\ln|x||dx = \int_a^0 |\ln|x||dx + \int_0^b |\ln|x||dx$$

et cette intégrale converge si les deux intégrales $\int_a^0 |\ln|x||dx$ et $\int_0^b |\ln|x||dx$ convergent.

Pour b' tel que $b' \leq 1$ et $b' \leq b$, on a $\int_0^b |\ln|x||dx = \int_0^{b'} |\ln|x||dx + \int_{b'}^b |\ln|x||dx$. Alors $\int_0^{b'} |\ln|x||dx = \int_0^{b'} |\ln x|dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{b'} |\ln x|dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{b'} \ln x dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}[x\ln x]_\varepsilon^{b'} = -b'\ln b' + \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon) = -b'\ln b' + 0 = -b'\ln b'$. Ainsi $\int_0^{b'} |\ln|x||$ converge donc $\int_0^b |\ln|x||dx$ converge (on a ajouté une intégrale convergente car d'une fonction continue sur le segment $[b,b']$) Le cas $\int_a^0 \ln|x|dx$ est similaire.

3.4. **Exercice 4.** *Vérifier qu'une fonctionnelle est une distribution***.** Soit la fonctionnelle T : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$T(\varphi) =< T, \varphi >= \varphi'(0)$$

Démontrer que T est une distribution.

Il faut démontrer que la fonctionnelle T est continue et linéaire.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= (\alpha\varphi_1 + \beta\phi_2)'(0) >$$

mais d'après la linéarité de la dérivation on a

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)' = \alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2'$$

et $(\alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2')(0) = \alpha\varphi_1'(0) + \beta\varphi_2'(0)$ d'où

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= \alpha < T, \varphi_1 > +\beta < T, \varphi_2 >$$

et T est bien linéaire.

Montrons qu'elle est continue: On rappelle qu'une fonctionnelle est continue si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ alors la suite de nombres $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$.

On considère donc une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ (c'est à dire que les supports des φ_n sont contenus dans un même ensemble indépendant de

n et que (φ'_n) converge uniformément vers φ', $(\varphi_n")_n$ converge uniformément vers $\varphi"$, (φ^p_n) converge uniformément vers (φ^p) ...)

Alors $| < T, \varphi_n > - < T, \varphi > | = |\varphi'_n(0) - \varphi'(0)| \leq ||\varphi'_n - \varphi'||_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$ puisque (φ'_n) converge uniformément vers φ'. Ainsi $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$ et T est donc bien continue.

3.5. **Exercice 5.** *Limite au sens des distributions.* On dit que la suite de distributions $(T_n)_n$ de $\mathcal{D}'$ converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $(< T_n, \varphi >)_n$ tend vers $< T, \varphi >$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.

Soit la fonction porte

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $g_n(x) = n\Pi(nx)$. Calculer la limite de la suite (T_{g_n}).

3.6. **Exercice 6.** *Dérivée au sens des distributions***.** Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction

(1) $f(x) = |x|$

Soit $T = T_f$ la distribution associée à la fonction f c'est à dire que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$ on a

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} < T', \varphi >= - < T, \varphi' >= & - \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi'(x)dx \\ & = \textstyle\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\ & = [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \textstyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \end{aligned}$$

Or φ est dans $\mathcal{D}$ donc à support borné et est donc nulle pour x assez petit donc $x\varphi(x)$ aussi et $\lim_{x \to -\infty} x\varphi(x) = 0$ et $[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} = 0$. De façon similaire $[x\varphi(x)]_0^{\infty} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} < T', \varphi >= & = - \textstyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \\ & = \textstyle\int_{-\infty}^{0} -1 \times \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} 1 \times \varphi(x)dx \end{aligned}$$

La distribution T' est la distribution associée à la fonction g c'est à dire $T' = T_g$ où g définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On la note aussi la fonction g de la façon suivante:

$$g = -\mathbb{1}_{]-\infty,\mathbf{0}]} + \mathbb{1}_{[\mathbf{0},+\infty[}.$$

Remarquons que T' peut-être la distribution régulière associé aussi à la fonction

$$g_a(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ a & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

(2) $f(x) = sgn(x)$ ($f(x) = 1$ pour $x > 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et $f(0) = 0$) On procède de la manière que ci-dessus: Soit $T = T_f$ la distribution associée à la fonction f; on a alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Alors, avec la définition de la dérivée d'une distribution et puisque φ' est encore dans $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ll} < T', \varphi > & = - < T, \varphi' > \\ & = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} -\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx \\ & = [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} \\ & = \varphi(0) - \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) - \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) + > \varphi(0) = 2\varphi(0) \\ & = 2 < \delta_0, \varphi > \end{array}$$

La distribution T' est donc la distribution δ_0 c'est à dire qu'ici on a un exemple de dérivée au sens des distributions d'une distribution régulière qui donne une distribution singulière.

3.7. **Exercice 7.** *Calcul d'une distribution***.** Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^{+\infty}$.

(1) Déterminer la distribution $\psi\delta$.

La distribution produit d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^{+\infty}$ est par définition: pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$

$$< \psi\delta, \varphi >=< \delta, \psi\varphi >= \psi(0)\varphi(0) = \psi(0) < \delta, \varphi > .$$

Ainsi on a l'égalité de distributions

$$\psi\delta = \psi(0)\delta$$

(2) En déduire $\psi\delta$ quand $\psi(x) = x$. On a alors quand $\psi(x) = x$, $\psi\delta = 0$.