UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année

Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique

Elisabeth REMM

Chapitre 2

Etude de quelques fonctions spéciales

Introduction:

Le but de ce chapitre est d'étudier trois types de fonctions qui sont indispensables pour modéliser quelques phénomènes physiques comme les vibrations d'une membrane ou la diffusion de la chaleur: la fonction d'erreur, la fonction Gamma et les fonctions de Bessel. Ces fonctions sont définies à partir d'intégrales simples ou généralisées.

1. La fonction d'erreur

1.1. Définition.

Définition 1. *On appelle fonction d'erreur ou encore fonction d'erreur de Gauss, la fonction*

$$\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Comme l'exponentielle est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ la fonction erf est dérivable et sa dérivée est

$$(\mathrm{erf})'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0.$$

La fonction erf est croissante. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$ donc la fonction est impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à O. On démontre (voir chapitre 1) que l'intégrale généralisée

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

converge vers 1 et la fonction erf a pour limite 1 en $+\infty$. Son graphe est le suivant

1.2. **Propriétés.** La propriété suivante permet de faire du calcul numérique sur la fonction erf.

Proposition 1. *La série entière*

$$\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\times n!} x^{2n+1}$$

converge pour tout x réel (le rayon de convergence est infini). De plus on a

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\times n!} x^{2n+1}$$

Cette écriture sous forme de somme de série entière permet de donner des valeurs approchées.

1.3. **Applications de la fonction d'erreur.** La fonction erreur erf permet d'exprimer la marge d'erreur des évaluations statistiques

Son complément erfc (défini par $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$) intervient dans des problèmes de diffusion:

- diffusion de la chaleur dans un milieux semi-infini à température de surface constante

- diffusion des espèces chimiques dans des milieux quasi-infini à concentration superficielle constante.

Voici deux exemples classiques d'applications.

(1) La loi normale centrée réduite en probabilité.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P). Rappelons que Σ est la tribu des événements et P est la probabilité définie sur Ω. La loi de probabilité de X est la probabilité:

$$P_X(]a,b]) = P(\{\omega \in \Omega;\ a < \omega \leq b\})$$

La fonction de répartition de X est la fonction d'une variable réelle:

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

La fonction de densité f est une fonction d'une variable réelle positive telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Définition 2. *On appelle loi normale de paramètre μ et σ la loi de probabilité continue notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et associée à la densité*

$$g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La loi normale est centrée si $\mu = 0$ et réduite si $\sigma = 1$ c'est à dire que la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ correspond à la loi de densité $g_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$$

Cette loi permet en particulier de trouver des approximations de la loi binomiale. Comme la fonction $g_{0,1}$ est paire, on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}\, dx.$$

On a aussi, en notant F la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite, i.e

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{t^2}{2}}\, dt,$$

la relation liant F à la fonction erf suivante:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{t^2}{2}}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{u^2}{2}}\, \sqrt{2}dt$$

après changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$. d'où

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

soit encore

$$\mathrm{erf}(x) = 2F(\sqrt{2}x) - 1.$$

Rappelons qu'une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli si elle ne prend que deux valeurs 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $q = 1-p$. Par exemple on lance une pièce donc il n'y a que deux issues pile ou face. Autre exemple on teste un individu au coronavirus: il n'y a que deux issues positif ou négatif. lci a loi de probabilité de X est

$$P_X(\{1\}) = p, \quad P_X(\{0\}) = 1-p.$$

La loi binomiale de paramètre n et p correspond à la somme de n tirages indépendants suivant chacun la loi de Bernoulli. (par exemple on lance n fois la pièces ou on teste n individus) La loi de probabilité correspond à la probabilité d'avoir k succès lorsqu'on fait n expériences. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a

$$P_X(\{k\}) = P(X=k) = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Lorsque n et k sont grands, ce coefficient binomial est difficile à calculer. On utilise alors une approximation avec la loi normale plus précisemment si npq est grand par rapport à 1 (c'est le cas si $n \geq 30, np \geq 5$ et $np \geq 5$) alors

$$P_X(\{k\}) = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \simeq \int_{k-0,5}^{k+0,5} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} dx = P(k-0,5 \leq Y \leq k+0,5).$$

(on fait également une correction de continuité pour approximer la loi discrète $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ par la loi continue $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$). De plus on peut se ramener la loi normale rduite pour laquelle on a des tableaux de valeurs.

Par exemple on teste 10000 individus et la probabilité pour que 500 soient positifs est égale à

$$P_X(\{500\}) = \binom{500}{10000} 0,5^{500}(0,5)^{9500}.$$

en supposant que la probabilité d'être positif est $0,5$. Ce résultat est pratiquement impossible à calculer donc on l'approxime par la loi normale.

(2) Solutions de l'équation de la chaleur

On s'intéresse ici à un problème de diffusion de la chaleur dans le cas unidimensionnel (par exemple sur un fil mais pas sur une surface). Le problème consiste à trouver la fonction température $T(x,t)$ où x est l'abscisse du point suite à un paramétrage de l'espace unidimensionel et t le temps. Cette fonction température est solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(x,t) = \rho(x,t)$$

où ρ est une fonction donnée correspondant à une source de chaleur et χ un coefficient de diffusion thermique. On s'intéressera plus tard à la résolution de cette équation après avoir introduit la notion de transformation de Fourier. Par exemple, si l'espace unidimensionel est modelisé par $\mathbb{R}^+$ c'est à dire une demi-règle infinie, et si en l'instant initial t la température est uniforme et égale à T_1, en supposant que l'origine x_0 soit portée et maintenue à la température T_2, alors

$$T(x,t) = T_2 - (T_2 - T_1)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right).$$

On remarque que cette solution correspond à une vitesse de propagation de la chaleur infinie. Cette solution est à manipuler avec précaution mais elle est satisfaisante dans la plupart des phénomènes thermiques.

2. La fonction Gamma d'Euler

2.1. Définition.

Définition 3. *La fonction* Γ *est définie pour tout* $x > 0$ *par l'intégrale généralisée à paramètre*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Regardons quelles sont les valeurs de x telles que $\Gamma(x)$ existe. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}$$

(elle est bien définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ puisque $t^{x-1} = e^{(x-1)lnt}$ donc pour t dans $]0,+\infty[$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_x: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ donc elle est localement intégrable cad

$$\int_a^b f_x(t)dt = \int_a^b f(x,t)dt$$

existe pour tout $[a,b] \in]0,+\infty[$. Problème on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

donc on a $+\infty$ donc une intégrale généralisée en $+\infty$, et en 0 f_x n'est pas définie en 0 (cad quand $t=0$) puisque $t^{x-1}=e^{(x-1)lnt}$ et ln n'est pas défini en 0 donc l'intégrale est aussi généralisée en 0

Pour montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge il suffit pour un $a>0$ de montrer que $\int_0^a e^{-t}t^{x-1}dt$ converge et $\int_a^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge.

La fonction f_x est positive sur $]0,+\infty[$. On peut donc utiliser les critères d'équivalence, de comparaison, etc...

La limite en 0 de e^{-t} est 1, donc quand t est proche de 0, on a

$$e^{-t}t^{x-1} \sim_0 t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

et l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$$

converge (intégrale de Riemann généralisée en 0) si $1-x<1$ donc $x>0$, et par équivalence l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$$

converge pour $x>0$. La convergence de la deuxième intégrale peut se montrer en utilisant la propriété suivante: Pour x fixé on a

$$\lim_{t+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1}=0$$

donc pour t assez grand

$$t^2e^{-t}t^{x-1}<1$$

soit

$$e^{-t}t^{x-1}<\frac{1}{t^2}$$

et

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$$

converge (intgrale de Riemann généralisée en $+\infty$) donc par comparaison (on travaille bien avec des fonctions positives donc le critère de comparaison s'applique) $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge.

En conclusion pour $x>0$ l'intgrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge donc Γ est dfinie sur $x>0$.

2.2. **Dérivabilité de la fonction Γ.**

Théorème 1. *La fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par*

$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt.$$

C'est une conséquence directe du théorème de dérivation. En effet, si

$$f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$$

alors

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = e^{-t}(\ln t)t^{x-1}.$$

Rappelons en effet que $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$ et donc la dérivée par rapport à x est $\ln(t)e^{(x-1)\ln(t)}$. Les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$. De plus pour tout intervalle fermé $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on peut majorer cette dérivée partielle par une fonction intégrable $g(t) = e^{-t}(\ln t)max(t^{a-1}, t^{b-1})$ (pour $t \in \mathbb{R}^{*+}$, l t^{x-1} est majorée par t^{a-1} si $t \in]0,1]$ et par t^{b-1} si $t \in]1,+\infty[$. on étudie la convergence des intégrales de g entre 0 et 1, et entre 1 et $+\infty$ de manière similaire à ce que l'on à fait précédemment) et donc le théorème de dérivation s'applique.

Théorème 2. *La fonction Gamma vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

de plus

$$\Gamma(1) = 1$$

Démonstration. Une intégration par partie nous donne, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \left[e^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x}e^{-t}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$$

car

$$\lim_{t\to 0} t^x e^{-t} = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$$

c'est-à dire

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

Il nous reste à démontrer la dernière relation. On a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^0 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Corollaire 1. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Démonstration. Ceci se démontre par récurrence à partir des résultats du théorème précédent. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n = \{\Gamma(n) = (n-1)!\}$. La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque $\Gamma(1) = 1 = 0!$ (initialisation). Prenons $n \geq 1$ fixé et supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$ alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ donc la propriété est héréditaire. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est à dire $\Gamma(n+1) = n!$.

2.3. **Formule des compléments et intégrale de Gauss.** Pour $x \in]0,1[$ on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

appelé la **formule des compléments**.

On a en particulier, pour $x = 1/2$,

$$(\Gamma(1/2))^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)}$$

d'où

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

puisque $\Gamma(1/2) > 0$. Cela permet de calculer $\Gamma(\frac{1}{2}+n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Notons également que puisque

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt$$

en posant $x = \sqrt{t}$, $t = x^2$ et on obtient

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\frac{1}{x}2xdx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Ainsi l'intégrale de Gauss est égale à

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.4. **Autres propriétés de la fonction Gamma.**

2.4.1. *La formule de Stirling.* Cette formule s'énonce ainsi

Proposition 2. *Pour x proche de $+\infty$, on a*

$$\Gamma(x+1) \simeq \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

La démontration pourra être faite en exercice. Comme application, on a la célèbre approximation: pour n grand, alors

$$(n+1)! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

L'intéret de cette formule est de pouvoir évaluer $n!$ pour n assez grand.

2.4.2. *La formule de Gauss.* Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!n^x}.$$

3. Les fonctions de Bessel

3.1. **Définition.** Les fonctions de Bessel interviennent dans de nombreux problèmes physiques, par l'intermédiaire de solutions particulières de certaines équations aux dérivées aux partielles. Elles interviennent aussi dans des problèmes de conduction de chaleur, d'électromagnétisme et de diffraction. Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques pour leur caractère oscillant mais avec modulation d'amplitude et de fréquence (elles s'amortissent).

On les voit notamment apparaître dans des solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

lorsqu'on recherche des fonctions harmoniques $u=f(r)g(z)h(\theta)$ solutions de cette équation écrite en coordonnées cylindriques, conduit à $f(r)=y(\alpha r)$ où y est une solution de l' **équation de Bessel d'ordre** ν qui est l'équation différentielle:

$$t^2y''+ty'+(t^2-\nu^2)y=0$$

où ν est un réel. Cette équation différentielle est une équation linéaire du second ordre coefficients non constants. On n'a pas de méthode systématique, comme pour les quations diffrentielles linaires coefficients constants, conduisant à l'écriture des solutions. Lorsqu'on cherche à résoudre cette équation différentielle, on pose $y(t)=t^\nu g(t)$. Cette équation se ramène à:

$$t^{\nu+1}(tg''(t)+(2\nu+1)g'(t)+tg(t))=0$$

soit, pour $t\neq 0$,

$$tg''(t)+(2\nu+1)g'(t)+tg(t)=0.$$

Cette équation est un peu plus simple, mais toujours à coefficients non constants. Toutefois, on peut chercher des solutions d'un type particulier, celles qui sont développables en séries entières. Ensuite nous devrons les comparer aux solutions générales. Posons $g(t)=\sum a_nt^n$.. On remplace dans l'équation différentielle. On obtient des relations de récurrence sur les coefficients a_n.

On récupère comme fonction $g(t)$ la somme de la série

$$g(t)=a_0\Gamma(\nu+1)\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}n!\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Pour un bon choix de a_0, on obtient comme solution la fonction

$$J_\nu(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}$$

appelée fonction de Bessel d'ordre ν**.**

Remarquons qu'on récupère une famille de solutions de $\Delta u=0$ sous la forme

$$u=y(\alpha r)(Ae^{\alpha z}+Be^{-\alpha z})(C\sin(\nu\theta)+D\cos(\nu\theta))$$

où $y(t)$ est une solution de l'équation de Bessel de paramètre ν.

Lorsque ν n'est pas entier, $(J_\nu,J_{-\nu})$ forme un système fondamental de solutions c'est à dire que toute solution de l'équation de Bessel de paramètre ν s'écrit $y(t)=aJ_\nu(t)+bJ_{-\nu}(t)$. avec $a,b\in\mathbb{R}$.

Si ν est un entier naturel on a

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!(n+\nu)!}$$

3.2. **Relations de récurrence sur les fonctions de Bessel.** On a les relations de récurrence suivantes

$$J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} J_\nu(t)$$
$$J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t) = 2J'_\nu(t)$$

En particulier on a

$$J_1(t) = -J'_0(t)$$

D'autres fonctions de Bessel particulières remarquables sont pour des ordres 1/2 entiers:

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t.$$

$$J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t.$$

$$J_{3/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\frac{\sin t}{t} - \cos t\right).$$

3.3. **Forme intégrale d'une fonction de Bessel d'ordre entier.** Lorsque ν est un réel positif, on a la forme intégrale

$$J_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \int_0^1 \cos(tx)(1-x^2)^{\nu-1/2} dx.$$

Montrons cette représentation pour $\nu = 0$: l'équation différentielle prend la forme

$$ty'' + y' + ty = 0$$

On verra qu'on peut trouver une solution de cette équation via la transformation de Laplace. Recherchons ici une fonction développable en série entière, c'est-à-dire sous la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ qui soit solution de cette équation différentielle. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} = 0$$

d'où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[a_{n-2} + n a_n + n(n-1)a_n\right] t^{n-1} + a_1 = 0$$

Il en résulte que $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{2n+1} = 0$ et

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2n)^2} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Les solutions trouvées sont donc lorsque $a_0 = 1$:

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

C'est une fonction **paire, définie sur $\mathbb{R}$ car le rayon de convergence de cette série est infini**.

On voit l'analogie avec l'écriture de la fonction de Bessel d'ordre ν en se souvenant que la fonction Γ prolonge la factorielle en dehors des nombres entiers.

Pour obtenir l'écriture intégrale de la fonction de Bessel d'ordre 0 on utilise l'intégrale de Wallis

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

et on montre que

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\sin\theta)^{2n}}{(2n)!} \right) d\theta \\ &\quad \text{(intervertion intégration et sommation car la convergence est uniforme)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t\sin\theta) d\theta \end{aligned}$$

d'où

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t\sin\theta) d\theta$$

Plus généralement, si k est un entier on a

$$J_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(t\sin\theta - k\theta) d\theta$$