CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques: PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 1

Rappels sur les ensembles

1. Ensembles. Eléments d'un ensemble

1.1. **Ensembles. Appartenance.** Nous considèrerons les ensembles comme des collections d'objets appelés les éléments de cet ensemble. Les ensembles de nombres les plus classiques sont $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Ces ensembles sont tous infinis, c'est-à-dire contiennent une infinité d'éléments. Un ensemble qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments est dit fini. Lorsque ce nombre fini n'est pas trop grand, on représente parfois cet ensemble en écrivant tous les éléments qu'il contient de la façon suivante:

$$\{a, b, c\}$$

il s'agit ici d'un ensemble contenant (seulement) les trois lettres a, b, c.

Soit E un ensemble. Si a est un élément de E, on écrit

$$a \in E$$

qui se lit a appartient à E.

Définition 1. *Deux ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si $a \in E$ alors $a \in F$ et si $b \in F$ alors $b \in E$.*

1.2. **Sous-ensemble. Inclusion.**

Définition 2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F. Dans ce cas on écrit*

$$E \subset F$$

qui se lit E est inclus dans F.

Dans ce cas, on dit que E est un sous-ensemble de F. Par exemple, on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

ou bien

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Si A désigne l'ensemble des nombres pairs, alors

$$A \subset \mathbb{N}.$$

Un des problèmes qui nous intéressera rapidement est de déterminer tous les sous-ensembles d'un ensemble fini donné. Pour cela, nous avons besoin d'un ensemble particulier, appelé l'ensemble vide.

Définition 3. *On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.*

De par sa définition, l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

2. Ensemble des parties d'un ensemble

2.1. **Définition.**

Définition 4. *Soit E un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de E, l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de E.*

Exemples

(1) Soit E l'ensemble à deux éléments : $E = \{a, b\}$. Alors E admet comme sous-ensembles $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ et E lui même. En effet, de par la définition de l'inclusion, on a toujours $E \subset E$. Ainsi
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$
Si E contient 2 éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 4 éléments.

(2) Soit E l'ensemble à trois éléments : $E = \{a, b, c\}$. Alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$
Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments.

2.2. **Lien entre appartenance et inclusion.** Soit E un ensemble. Si A est un sous-ensemble de E, on a alors les relations

$$A \subset E$$

et

$$A \in \mathcal{P}(E).$$

Il est clair que ces deux relations veulent dire la même chose.

3. Opérations sur les ensembles

3.1. **Réunion de deux ensembles.**

Définition 5. *Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion de E et F, l'ensemble noté $E \bigcup F$ et dont les éléments appartiennent à E ou à F.*

La notation $E \bigcup F$ se lit aussi E union F. Notons qu'un élément de $E \bigcup F$ peut appartenir à E et à F. Cette opération réunion peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, c'est-à-dire si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \bigcup B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcup B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

3.2. **Intersection de deux ensembles.**

Définition 6. *Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F, l'ensemble noté $E \bigcap F$ et dont les éléments appartiennent à E et à F.*

La notation $E \bigcap F$ se lit aussi E inter F. Cette opération intersection peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, alors $A \bigcap B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

On vérifie sans peine les propriétes suivantes: Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors

(1) $A \bigcup B = B \bigcup A$. $A \bigcap B = B \bigcap A$.
(2) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
(3) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
(4) $A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A$.

Définition 7. *Deux ensembles E et F sont dits disjoints si*

$$E \bigcap F = \emptyset.$$

3.3. **Complémentaire d'un sous-ensemble.**

Définition 8. *Soit A un sous-ensemble d'un ensemble donné E. On appelle complémentaire de A dans E le sous-ensemble de E noté $\complement_E A$ dont les éléments sont ceux de E qui n'appartiennent pas à A.*

Ainsi

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tels que } x \notin A\}$$

où $\notin$ signifie "n'appartient pas". On a donc les propriétés suivantes:

(1) $A \bigcap \complement_E A = \emptyset$.

(2) $A \bigcup \complement_E A = E$.

On dit, dans ce cas que les sous-ensembles A et $\complement_E A$ forment une partition de E.

Proposition 1. Lois de Morgan. *Soient A et B deux sous-ensembles de E Alors*

(1) $\complement_E(A \bigcup B) = \complement_E A \bigcap \complement_E B$.

(2) $\complement_E(A \bigcap B) = \complement_E A \bigcup \complement_E B$.

On montrera ces relations en exercice.

Généralisation

Soit I une partie de N. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Alors

(1) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tels qu'il existe } i \in I \text{ avec } x \in A_i\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tels pour tout } i \in I \text{ on a } x \in A_i\}$.

3.4. **Partition d'un ensemble.**

Définition 9. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit qu'elle forme une partition de E si*

(1) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$

(2) $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *dès que* $i \neq j \in I$.

Nous avons vu, comme exemple, que la famille $(A, \complement_E A)$ formait une partition de E.

4. Cardinal d'en ensemble fini

Définition 10. *Un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments (on peut compter tous ses éléments). Si E est un ensemble fini, son cardinal noté* $\mathrm{card}(E)$ *est le nombre de ses éléments.*

Si A est une partie de E, alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$ et comme E est supposé fini, l'égalité n'a lieu que si $A = E$. On note que ceci est faux si E est infini (s'il n'est pas fini).

Quelques propriétés du cardinal

(1) Si A et B sont des sous-ensembles d'un ensemble fini E, alors
$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

(2) Soit $A \times B = \{(a,b), A \in A, b \in B\}$ le produit cartésien de A et B, alors
$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B).$$

Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ aussi. Plus précisément, on a

Proposition 2. *Si* $\mathrm{card}(E) = n$, *alors* $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

5. Applications, bijections, injections, surjections

5.1. Fonctions, applications.

Définition 11. *Soient E et F deux ensembles. On appelle fonction définie sur E et à valeurs dans F toute opération consistant à faire correspondre à chaque élément $x \in E$ un élément bien déterminé de F;*

L'ensemble E s'appelle l'ensemble de définition de la fonction. Au lieu de dire "soit une fonction ayant E comme ensemble de départ et F comme ensemble d'arrivée, on dira plutôt: **soit f une application de E dans F**.

Composition des applications.

Soients A_1,A_2 et A_3 trois ensembles et
$$f : A_1 \to A_2, \quad g : A_2 \to A_3$$
deux applications. Alors l'application
$$x \in A_1 \to g(f(x)) \in A_3$$
est une application de A_1 dans A_3 appelée la composition de g et f et notée $g \circ f$:
$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

5.2. Applications injectives, surjectives et bijectives.

Définition 12. *Soit $f : A \to B$ une application.*

(1) *On dit que f est* **injective** *si deux éléments distincts de A ont des images distinctes, autrement dit si*
$$x \neq x' \ (x, x' \in A) \ \text{ implique } \ f(x) \neq f(x').$$

(2) *On dit que f est* **surjective** *si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.*

(3) *On dit que f est* **bijective** *si elle est injective et surjective.*

On notera que la condition d'injectivité est équivalente à

$$\text{pour tout } x, x' \in A, \text{ alors } f(x) = f(x') \text{ implique } x = x'.$$

La condition de surjectivité s'écrit aussi:

$$\text{Pour tout } y \in B, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

Image réciproque Soit $f : A \to B$ une application. On appelle image directe de A par f et on le note $f(A)$ le sous-ensemble de B définie par

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Ainsi, dire que f est surjective se traduit par $B = f(A)$.

Soit $B_1 \subseteq B$ un sous-ensemble de B. On appelle image réciproque de B_1 par f le sous-ensemble de A, noté $f^{-1}(B_1)$ dont les éléments sont les éléments $x \in A$ tels que $f(x) \in B_1$:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A,\ f(x) \in B_1\}.$$

Soient E et F deux ensembles finis. Soit F^E l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

Proposition 3. *Si $n = \mathrm{card}(E)$ et $p = \mathrm{card}(F)$, alors*

$$\mathrm{card}(F^E) = p^n.$$

Par exemple si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathrm{card}(F^E) = 3^2 = 9.$$

Certte propriété est très pratique car elle évite de lister toutes les applications pour pouvoir les compter. Dans cet exemple, les 9 applications sont

$$\begin{cases} f_1(1) = a, f_1(2) = a \\ f_2(1) = a, f_2(2) = b \\ f_3(1) = a, f_3(2) = c \\ f_4(1) = b, f_4(2) = a \\ f_5(1) = b, f_5(2) = b \\ f_6(1) = b, f_6(2) = c \\ f_7(1) = c, f_7(2) = a \\ f_8(1) = c, f_8(2) = b \\ f_9(1) = c, f_9(2) = c \end{cases}$$

EXERCICES

Exercice 1. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer que si

$$A \bigcup C \subset A \bigcup B \text{ et } A \bigcap C \subset A \bigcap B$$

alors

$$C \subset B.$$

Exercice 2. Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer

(1) $A \subset B$ si et seulement si $A \bigcup B = B$
(2) $A \subset B$ si et seulement si $\complement_E A \bigcup B = E$

Exercice 3. Démontrer les lois de Morgan.

Exercice 4. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5. Soit E un ensemble fini de n éléments. Déterminer le nombre d'élément de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 6. Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E et f une application de E dans un ensemble F. Montrer que

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'égalité est fausse.

Exercice 7. Dans une classe de 32 élèves, 21 parlent l'anglais et 18 l'allemand. On suppose que chaque élève parle au moins une de ces langues. Combien d'élèves parlent la fois l'anglais et l'allemand?

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles. On appelle différence symétrique de ces deux ensembles, l'ensemble

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Si n et le cardinal de A et p celui de B, calculer le cardinal de $(A \Delta B)$.

Exercice 9. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10. Combien y a-t-il d'entiers compris entre 1 et 999 et ne contenant pas 0?

Exercice 11. Quel est le nombre de tiercés possibles dans une course comptant 15 chevaux? Quelle est la chance de gagner dans un tiercé dans le désordre?

Exercice 12

M. Usald doit créer un code de sécurité à 6 chiffres pour son smartphone.

(1) Combien de codes peut-il créer ?
(2) Il souhaite modifier son code. Il décide de ne jamais utiliser le chiffre 0. Combien de codes peut-il créer ?
(3) Si maintenant il décide seulement de ne jamais utiliser le même chiffre, mais s'autorise à choisir le 0. Combien de codes peut-il créer ?

(4) Il a oublié son code, il sait seulement qu'il se termine par 5 et qu'il l'a choisi comme dans la question précédente. Combien de codes différents sont alors possibles?

Exercice 13. Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble des allèles $E = \{A; B; O\}$.

(1) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents (l'ordre ne compte pas pour les allèles). Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.
(2) On appelle homozygote un gène qui est représenté par deux allèles identiques. Quel est le nombre d'homozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.
(3) On appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Quel est le nombre de génotypes et listez-les.
(4) Le groupe sanguin est alors déterminé par ces génotypes sachant que :
   - l'allèle A est dominante sur l'allèle O, donc par exemple $\{A; O\}$ donne le groupe A,
   - l'allèle B est dominante sur l'allèle O, donc par exemple $\{B; O\}$ donne le groupe B.

   Montrer que l'on a bien 4 groupes sanguins : $\{A, B, AB, O\}$.