CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique. RCP103

Mathématiques: PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 2

Espaces probabilisés. Probabilités

1. Espaces probabilisés

1.1. Tribus.

Définition 1. *Soient Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle tribu de Ω un sous-ensemble*

$$\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

vérifiant les conditions suivantes:

(1) $\Omega \in \mathfrak{F}$,
(2) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,
(3) *Si* $A \in \mathfrak{F}$, *alors* $\complement_\Omega A \in \mathfrak{F}$,
(4) *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathfrak{F}$ *alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Les éléments d'une tribu $\mathfrak{F}$ de Ω sont donc des sous-ensembles de E. La troisième condition préxcise que si un sous-ensemble est dans la tribu $\mathfrak{F}$, son complémentaire également. Un cas particulier de la condition (4) est de dire que si deux sous-ensembles A et B sont dans la tribu $\mathfrak{F}$, alors leur réunion $A \bigcup B$ est aussi dans $\mathfrak{F}$.

Exemples.

(1) Soit Ω un ensemble. Alors $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.
(2) Soit Ω un ensemble. Alors $\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu de Ω. C'est la plus petite tribu que l'on puisse construire sur Ω. Elle est souvent appelée la tribu triviale.
(3) Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Considérons le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ suivant

$$\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}.$$

Alors $\mathfrak{F}$ vérifie les conditions pour être une tribu de Ω.

Définition 2. *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble (quelconque) de parties de Ω. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{C}$*

C'est en fait la plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{C}$. On la note $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$. Il est évident que si $\mathcal{C}$ est déjà une tribu, alors $\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Exemple. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{C} = \{\{a\}\}$. Alors

$$\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Définition 3. Tribu de Borel *Considérons l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}$. On appelle tribu de Borel la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts de la forme $]a, +\infty[$, où a parcourt $\mathbb{R}$.*

Cette tribu contient tous les intervalles ouverts, tous les intervalles fermés et tous les points de $\mathbb{R}$. Mais on démontre (ce qui n'est pas facile) que la tribu des boréliens, que nous noterons par $\mathcal{T}(\mathbb{R})$, ne coïncide pas avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{T}(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}$. Cette tribu jouera une rôle important dans l'étude des probabilités sur des ensembles infinis.

1.2. **Espaces probabilisables.**

Définition 4. *Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathfrak{F})$ où Ω est un ensemble, $\mathfrak{F}$ une tribu sur Ω.*

Par exemple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable. De même $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset\})$ est aussi un espace probabilisable.

Vocabulaire Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable. Alors

- Ω est appelé l'espace des épreuves.
- Les éléments de la tribu $\mathfrak{F}$ sont les évènements.
- Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé résultat. Si $\omega \in \Omega$ est un élément d'un évènement $A \in \mathfrak{F}$, on dit que A est réalisé.

Exemple. Considérons l'ensemble à deux éléments

$$\Omega = \{p, f\}.$$

Cet espace des épreuves peut, par exemple, correspondre aux résultats d'un lancer d'une pièce de monnaie. Prenons

$$\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\{p, f\}, \emptyset, \{p\}, \{f\}\}.$$

Considérons le résultat p. Alors les évènements suivants sont réalisés:

$$\Omega, \{p\}.$$

Notons que l'évènement Ω est toujours réalisé, quel que soit le résultat $\omega \in \Omega$.

Définition 5. *Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable et soit $\omega \in \Omega$ un résultat. Deux évènements $A, B \in \mathfrak{F}$ sont dits réalisés simultanément si $\omega \in A \bigcap B$.*

Ceci implique, en particulier que $A\bigcap B\neq\emptyset$. Lorsque les évènements A et B vérifient $A\bigcap B=\emptyset$, on dit qu'ils sont incompatibles.

1.3. **Probabilités.**

Définition 6. *Soit* $(\Omega,\mathfrak{F})$ *un espace probabilisable. Une fonction*
$$P:\mathfrak{F}\rightarrow[0,1]$$
est appelée une probabilité sur cet espace si

(1) $P(\Omega)=1$,
(2) *Si* $A,B\in\mathfrak{F}$ *avec* $A\cap B=\emptyset$, *c'est-à-dire si* A *et* B *sont deux évènements incompatibles, alors*
$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$
(3) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements deux à deux incompatibles* ($A_n\in\mathfrak{F}$ *pour tout* n *et si* $n\neq m$ *alors* $A_n\bigcap A_m=\emptyset$), *alors*
$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n).$$

Remarque. La condition (3) est, de toute évidence, une généralisation de la condition (2). Il faut noter que les outils mathématiques utilisés dans cette propriété sont délicats. En effet $\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n)$ n'est pas une somme classique mais une "somme infinie" qui est définie par
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n)=\lim_{n\rightarrow+\infty}\sum_{p=0}^{n}P(A_p).$$
Une telle limite de somme finie est appelée une série numérique. On pourra se documenter sur les série dans l'ouvrage *Séries et Intégrales, L2PC*, également édité sur ce site :

http://livres-mathematiques.fr

Proposition 1. *Soit* P *une probabilité sur l'espace* $(\Omega,\mathfrak{F})$. *Alors*

(1) $P(\emptyset)=0$.
(2) *Pour tout* $A\in\mathfrak{F}$, $P(\Omega-A)=1-P(A)$.
(3) *Si* $A,B\in\mathfrak{F}$ *sont deux évènements pas nécessairement incompatibles, alors*
$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

Démonstration.

(1) Les évènements Ω et $\emptyset$ sont incompatibles. Donc
$$P(\Omega\bigcup\emptyset)=P(A)=P(A)+P(\emptyset).$$
Donc $P(\emptyset)=0$.

(2) Les évènements A et $\Omega - A$ sont incompatibles. Donc

$$P(A\bigcup(\Omega - A)) = P(A) + P(\Omega - A).$$

Or $A\bigcup(\Omega - A) = \Omega$ et donc $P(A\bigcup(\Omega - A)) = P(\Omega) = 1$. Ainsi

$$P(A) + P(\Omega - A) = 1,$$

d'où la propriété.

(3) On vérifie facilement:

$$A\bigcup B = A\bigcup((\Omega - A)\cap B), \quad B = (A\cap B)\bigcup((\Omega - A)\cap B.$$

Comme les évènements A et $(\Omega - A)\bigcap B$ sont incompatibles, alors

$$P(A\bigcup B) = P(A\bigcup((\Omega - A)\cap B)) = P(A) + P((\Omega - A)\bigcap B)).$$

De même, on aura

$$P(B) = P(A\cap B)\bigcup((\Omega - A)\cap B) = P(A\bigcap B) + P((\Omega - A)\bigcap B)).$$

Ainsi

$$P(A\bigcup B) = P(A) + P(A\bigcap B).$$

Exemples

(1) Soit $\Omega = \{p, f\}$. On considère la tribu $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

définie par

$$P(\{p\}) = \frac{1}{2} = P(\{f\}),\ P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

est une probabilité sur cet espace.

(2) Soit $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$. On considère la tribu $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application P définie à partir de

$$P(\{pp\}) = P(\{pf\}) = P(\{fp\}) = P(\{ff\}) = \frac{1}{4}$$

s'étend en une probabilité. Ceci signifie qu'il existe une unique loi de probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ dont la restriction aux évènements élémenatires est donnée par la relations ci-dessus. En particulier si $A = \{pp, pf, fp\}$ qui correspond à l'évènement d'avoir au moins pile dans deux lancers d'une pièce, alors $P(A) = \frac{3}{4}$ d'après la propriété (3).

(3) Soit Ω un ensemble fini et considérons l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Supposons que Ω contienne N éléments x_i, $i = 1, \cdots, N$. Considérons la probabilité définie à partir de

$$p_i = P(\{x_i\}) = \frac{1}{N}.$$

Chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Alors si A est un évènement contenant r éléments, on aura

$$P(A) = \frac{r}{N}.$$

Dans les exemples ci-dessus, l'espace probabilisable était fini. Donnons des exemples dans le cas où Ω est un espace infini. Soit $\Omega = \mathbb{R}$. On peut admettre l'impossibilité de définir une probabilité si l'ensemble $\mathfrak{F}$ des évènements est $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, Il nous faut donc définir $\mathfrak{F}$ de manière à pouvoir construire une probabilité. Pour cela on considère que $\mathfrak{F}$ est formé de tous les segments

$$[x_1, x_2]$$

de leurs réunions dénombrables et de leurs intersections. En particulier les sous-ensembles $]-\infty, x_1]$ sont dans $\mathfrak{F}$. En fait F est la plus petite tribu contenant ces sous-ensembles. On vérifie que $\mathfrak{F}$ contient tous les intervalles, ouverts, fermés, semi-ouverts, il contient aussi les singletons $\{x\}$ mais $\mathfrak{F}$ est strictement contenu dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Cette tribu est appelée la tribu des boréliens (du nom de Borel) et est notée $\mathfrak{B}$. Définissons à présent une probabilit: soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1.$$

Considérons l'évènement $A =]-\infty, x_1]$ et posons

$$P(A) = P(]-\infty, x_1]) = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx.$$

Ceci permet de définir $P(B)$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$. En particulier

$$P(]x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)dx.$$

Ceci se dénduit du fait que les évènements $]-\infty, x_1]$ et $]x_1, x_2]$ sont incompatibles. Donc

$$P(]-\infty, x_1] \bigcup]x_1, x_2]) = P(]-\infty, x_1]) + P(]x_1, x_2]).$$

Comme $]-\infty, x_1] \bigcup]x_1, x_2] =]-\infty, x_2]$, on obtient

$$P(]-\infty, x_2]) = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)dx = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx + P(]x_1, x_2]).$$

Ainsi

$$P(]x_1, x_2]). = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)dx.$$

Définition 7. *On appelle espace probabilisé un triplet* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *où* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *est un espace probabilisable et* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathfrak{F})$.

1.4. **Evènements négligeables.** Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 8. *Un évènement* $A \in \mathfrak{F}$ *est dit négligeable si sa probabilité est nulle:*

$$P(A) = 0.$$

Considérons par exemple l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$ où P est la probabilité définie par

$$P(]-\infty, x_1]) = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx$$

où α est une fonction vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1.$$

Alors chacun des évènements élémentaires $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ est négligeable.

1.5. **Formule de Poincaré.** Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ sont deux évènements, nous avons vu que

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

La formule de Poincaré donne la probabilité d'un évènement du type $A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ en fonctions des probabilités des évènements A_i et toutes les intersections. A titre d'exercice, on démontrera le cas $n = 3$. Dans ce cas la formule s'´crit:

Proposition 2. *Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \bigcap A_2) - P(A_1 \bigcap A_3) - P(A_2 \bigcap A_3) \\ & + P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3). \end{aligned}$$

On notera, dans cette formule, la règle des signes: le signe + devant les $P(A_i)$, le signe − devant les intersections de deux évènements, le signe + devant l'intersection de trois évènements. Ceci permet de mieux comprendre la formule générale:

Proposition 3. *Soient $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{F}$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n) = \; & P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - \left(\sum_{i \neq j \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j)\right) \\ & + \left(\sum_{i \neq j \neq k \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k)\right) + \cdots + \\ & + (-1)^n P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \end{aligned}$$

1.6. **Evènements indépendants.**

Définition 9. *Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Deux évènements $A, B \in \mathfrak{F}$ sont dits indépendants si*

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Cette notion d'indépendance est fondamentale pour la suite. Elle ne concerne que deux évènements. Pour trois (ou plus) évènements, nous avons la définition suivante

Définition 10. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé. Trois évènements* $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ *sont dits indépendants si*

(1) $P(A_i \bigcap A_j) = P(A_i)P(A_j), \ i \neq j \in \{1,2,3\}$,

(2) $P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Exemple. On considère l'expérience relative à un lancer de deux dés. On a alors

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}.$$

Cet ensemble fini contient donc $6\times 6 = 36$ éléments. On considère l'évènement$A$ correspondant à la somme des dés est paire:

$$A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\cdots,(6,6)\}.$$

2. Probabilités conditionnelles

2.1. **Définition.**

Définition 11. *Soient* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathfrak{F}$ *deux évènements tels que* $P(B) \neq 0$. *On appelle probabilité conditionnelle de l'évènement* A *sachant* B *le rapport*

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

Il est clair que la probabilité conditionnelle de A sachant l'évènement total Ω est égal à $P(A)$. De même si B est un évènement tel que $B \subset A$, alors $A \bigcap B = B$ et $P(A|B) = 1$.

Exemples.

(1) Supposons que Ω soit un ensemble fini. Notons par n_A, n_B et n le nombre d'éléments de A, B et Ω. Supposons que P soit uniforme, c'est-à-dire

$$P(A) = \frac{n_A}{n}, \ P(B) = \frac{n_B}{n}.$$

Alors si $n_{A\cap B}$ est le nombre d'éléments de $A \bigcap B$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}.$$

Si de plus, ces évènements sont indépendants, alors $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$ ce qui donne

$$P(A \bigcap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n} = \frac{n_A}{n}\frac{n_B}{n} = \frac{n_A n_B}{n^2}$$

soit

$$n_{A\cap B} = \frac{n_A n_B}{n}.$$

On a alors

$$P(A|B) = \frac{n_A n_B}{n}\frac{1}{n_B} = \frac{n_A}{n} = P(A).$$

(2) On considère une urne contenant 3 boules blanches B_1, B_2, B_3 et 2 boules rouges R_1, R_2. On tire successivement 2 boules. On veut trouver la probabilité de l'évènement correspondant la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. La probabilité pour que la première boule tirée soit blanche est $\frac{3}{5}$. Cela correspond à l'évènement$A$ constitué de tous les couples (B_i, B_j) et (B_i, R_k) $i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$ et $k = 1, 2$. La probabilité de tirer une deuxième boule rouge sachant que la première est blanche est égal à $\frac{2}{4}$. Si B est l'évènement la deuxième boule est rouge, alors $A \bigcap B$ est l'évènement la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. on a
$$P(A \bigcap B) = P(A|B).P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

2.2. **Le théorème de Bayes.**

Théorème 1. *Soient* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathfrak{F}$ *deux évènements tels que* $P(A) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 0$*. Alors*
$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration. La démonstration résulte directement des formules de définition de la probabilité conditionnelle.

Ce résultat se généralise de la façon suivante

Théorème 2. *Soient* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $\{A_1, \cdots, A_k\}$ *une partition de* Ω *telle que chaque* $A_i \in \mathfrak{F}$*,* $i = 1, \cdots, k$ *et* $P(A_i) \neq 0$*. Alors pour tout évènement* $B \in \mathfrak{F}$*, on a*
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_k) \cdot P(A_k)}$$
pour $i = 1, \cdots, k$.

Démonstration. Comme $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une partition de Ω, alors pour tout sous-ensemble B de Ω on a
$$B = B \bigcap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = (B \cap A_1) \bigcup (B \cap A_2) \bigcup \cdots \bigcup (B \cap A_k).$$
Comme les évènements $B \bigcap A_i)$ sont mutuellement incompatibles, alors
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k).$$
Mais
$$P(B \bigcap A_i) = P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$
Ainsi
$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_k) \cdot P(A_k).$$
Mais
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}.$$

Ainsi
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+\cdots+P(B|A_k)\cdot P(A_k)}.$$

EXERCICES

Exercice 1. On considère l'expériance suivante: on lance par trois fois une pièce de monnaie.

(1) Déterminer l'espace probabilisable correspondant.
(2) On suppose que chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Déterminer la probabilité de l'évènement correspondant faire au moins une fois pile.
(3) Même question mais en considérrant l'évènement suivant: faire au moins deux fois pile dans les trois lancers.

Exercice 2. On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ où $\mathfrak{B}$ est la tribu des boréliens. Soit $\alpha(x)$ la fonction définie par

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{x^2}{2}).$$

(1) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1$.
(2) En déduire que $P(]-\infty, x_1]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx$ définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.
(3) Calculer $P(\{x\})$.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable. Soit $a \in \Omega$ en élément donné dans Ω. Considérrons l'application

$$P : \mathfrak{F} \to [0, 1]$$

définie par

$$P(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A, \\ 0 \text{ si } a \notin A, \end{cases}$$

pour tout $A \in \mathfrak{F}$. Montrer que P est une probabilité.

Exercice 4. Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Montrer que

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \;& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \bigcap A_2) - P(A_1 \bigcap A_3) - P(A_2 \bigcap A_3) \\ & + P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3). \end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Fixons un évènement $M \in \mathfrak{F}$ tel que $p5M) \neq 0$. Montrer que l'application

$$P_M : \mathfrak{F} \to [0, 1]$$

donnée par

$$P_M(A) = P(A|M)$$

est une probailité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$.

Exercice 6. Une usine de composants ´lectriques fabrique 4 types de composants et les stocke dans 4 compartiments. Le premier compartment contient 2000 intŕupteurs, le deuxième 1000 prises le troisième 1000 disjoncteurs et le dernier 500 douilles. On estime que 10-pour 100 des intŕupteurs, des disjoncteurs et des prises sont défectueux et que 20-pour cent des douilles sont défectueuses. On prélève au hasard un composant dans un des compartiments.

(1) Trouver la probabilité pour que le composant choisi soit défectueux.
(2) Si le composant choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du quatrième compartiment?

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ trois évènements de même probabilité $\frac{1}{7}$. Quelle est la probabilité des évènements $A_i \bigcap A_j$ et $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ pour que évènements soient indépendants?