CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique. RCP103

Mathématiques: Modélisation markovienne

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 1

Espaces probabilisés. Probabilités

Programme

(1) Espaces probabilisés- Variables aléatoires
(2) Chaînes de Markov temps discret (CMTD) et temps continu (CMTC),
(3) chaîne de Markov immergée (EMC)
(4) Régime transitoire, régime permanent, ergodicité, distribution stationnaire. Equations de balance globale
(5) Files d'attente : file M/M/S, file M/G/1.
(6) Loi de Little, formule de Pollaczek-Khintchine
(7) Les réseaux de file d'attente (RFA) forme produit (monoclasses/multi-classes, ouverts/fermés) : réseaux de Jackson, Gordon-Newell et BCMP.
(8) Equation de trafic, Algorithme de la valeur moyenne (MVA)

Contents

1. Un petit rappel sur les ensembles

1.1. **Ensembles. Appartenance.** Nous considérerons les ensembles comme des collections d'objets appelés les éléments de cet ensemble. Les ensembles de nombres les plus classiques sont $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Ces ensembles sont tous infinis, c'est-à-dire contiennent une infinité d'éléments. Un ensemble qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments est dit fini. Lorsque ce nombre fini n'est pas trop grand, on représente parfois cet ensemble en écrivant tous les d'éléments qu'il contient de la façon suivante:

$$\{a, b, c\}$$

il s'agit ici d'un ensemble contenant (seulement) les trois lettres a, b, c.

Soit E un ensemble. Si a est un élément de E, on écrit

$$a \in E$$

qui se lit a appartient à E.

Définition 1. *Deux ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si $a \in E$ alors $a \in F$ et si $b \in F$ alors $b \in E$.*

1.2. **Sous-ensemble. Inclusion.**

Définition 2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F. Dans ce cas on écrit*

$$E \subset F$$

qui se lit E est inclus dans F.

Dans ce cas, on dit que E est un sous-ensemble de F. Par exemple, on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

ou bien

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Si A désigne l'ensemble des nombres naturels pairs, alors

$$A \subset \mathbb{N}.$$

Un des problèmes qui nous intéressera rapidement est de déterminer tous les sous-ensembles d'un ensemble fini donné. Pour cela, nous avons besoin d'un ensemble particulier, appelé l'ensemble vide.

Définition 3. *On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note* $\emptyset$.

De par sa définition, l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

1.3. **Ensemble des parties d'un ensemble.**

Définition 4. *Soit* E *un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de* E*, l'ensemble noté* $\mathcal{P}(E)$ *dont les éléments sont les sous-ensembles de* E.

Exemples

(1) Soit $E = \emptyset$ l'ensemble vide. L'ensemble des parties de E est l'ensemble $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ continent 1 élément. Et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ est un ensemble à deux éléments.

(2) Soit E l'ensemble à deux éléments : $E = \{a, b\}$. Alors E admet comme sous-ensembles $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ et E lui-même. En effet, de par la définition de l'inclusion, on a toujours $E \subset E$. Ainsi

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$

Si E contient 2 éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 4 éléments.

(3) Soit E l'ensemble à trois éléments : $E = \{a, b, c\}$. Alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments.

Remarque: Lien entre appartenance et inclusion

Soit E un ensemble. Si A est un sous-ensemble de E, on a alors les relations

$$A \subset E$$

et

$$A \in \mathcal{P}(E).$$

Il est clair que ces deux relations veulent dire la même chose.

1.4. **Opérations sur les ensembles.**

1.4.1. *Réunion de deux ensembles.*

Définition 5. *Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion de E et F, l'ensemble noté $E \bigcup F$ et dont les éléments appartiennent à E ou à F.*

La notation $E \bigcup F$ se lit aussi E union F. Notons qu'un élément de $E \bigcup F$ peut appartenir à E et à F. Cette opération réunion peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, c'est-à-dire si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \bigcup B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcup B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

1.4.2. *Intersection de deux ensembles.*

Définition 6. *Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F, l'ensemble noté $E \bigcap F$ et dont les éléments appartiennent à E et à F.*

La notation $E \bigcap F$ se lit aussi E inter F. Cette opération intersection peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, alors $A \bigcap B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

On vérifie sans peine les propriétes suivantes: Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors

(1) $A \bigcup B = B \bigcup A$. $A \bigcap B = B \bigcap A$.

(2) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

(3) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

(4) $A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A$.

Définition 7. *Deux ensembles E et F sont dits disjoints si*

$$E \bigcap F = \emptyset.$$

1.4.3. *Complémentaire d'un sous-ensemble.*

Définition 8. *Soit A un sous-ensemble d'un ensemble donné E. On appelle complémentaire de A dans E le sous-ensemble de E noté $\complement_E A$ dont les éléments sont ceux de E qui n'appartiennent pas à A.*

Ainsi

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tels que } x \notin A\}$$

où $\notin$ signifie "n'appartient pas". On a donc les propriétés suivantes:

(1) $A \bigcap \complement_E A = \emptyset$.

(2) $A \bigcup \complement_E A = E$.

On dit, dans ce cas que les sous-ensembles A et $\complement_E A$ forment une partition de E.

Proposition 1. Lois de Morgan. *Soient A et B deux sous-ensembles de E Alors*

(1) $\complement_E(A \bigcup B) = \complement_E A \bigcap \complement_E B$.

(2) $\complement_E(A \bigcap B) = \complement_E A \bigcup \complement_E B$.

On montrera ces relations en exercice.

Généralisation

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Alors

(1) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E$ tels qu'il existe $i \in I$ avec $x \in A_i\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E$ tels pour tout $i \in I$ on a $x \in A_i\}$.

1.4.4. *Partition d'un ensemble.*

Définition 9. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit qu'elle forme une partition de E si*

(1) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$

(2) $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *dès que* $i \neq j \in I$.

Nous avons vu, comme exemple, que la famille $(A, \complement_E A)$ formait une partition de E.

1.5. **Cardinal d'en ensemble fini.**

Définition 10. *Un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments (on peut compter tous ses éléments). Si E est un ensemble fini, son cardinal noté* $\mathrm{card}(E)$ *est le nombre de ses éléments.*

Si A est une partie de E, alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$ et comme E est supposé fini, l'égalité n'a lieu que si $A = E$. On note que ceci est faux si E est infini (s'il n'est pas fini).

Quelques propriétés du cardinal

(1) Si A et B sont des sous-ensembles d'un ensemble fini E, alors
$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$
(2) Soit $A \times B = \{(a, b), A \in A, b \in B\}$ le produit cartésien de A et B, alors
$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B).$$

Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ aussi. Plus précisément, on a

Proposition 2. *Si* $\mathrm{card}(E) = n$, *alors* $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

2. Espaces probabilisés

2.1. **Tribus.**

Définition 11. *Soient Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle tribu de Ω un sous-ensemble*
$$\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$
vérifiant les conditions suivantes:

(1) $\Omega \in \mathfrak{F}$,
(2) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,
(3) *Si* $A \in \mathfrak{F}$, *alors* $\complement_\Omega A \in \mathfrak{F}$,
(4) *Si* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathfrak{F}$ *alors*
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Les éléments d'une tribu $\mathfrak{F}$ de Ω sont donc des sous-ensembles de Ω. La troisième condition précise que si un sous-ensemble est dans la tribu $\mathfrak{F}$, son complémentaire également. Un cas particulier de la condition (4) est de dire que si deux sous-ensembles A et B sont dans la tribu $\mathfrak{F}$, alors leur réunion $A \bigcup B$ est aussi dans $\mathfrak{F}$.

Exemples.

(1) Soit Ω un ensemble. Alors $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.
(2) Soit Ω un ensemble. Alors $\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu de Ω. C'est la plus petite tribu que l'on puisse construire sur Ω. Elle est souvent appelée la tribu triviale.

(3) Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Considérons le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ suivant

$$\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Alors $\mathfrak{F}$ vérifie les conditions pour être une tribu de Ω. Notons que l'on a ici $\mathfrak{F} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 12. *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble (quelconque) de parties de Ω. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{C}$*

C'est en fait la plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{C}$. On la note $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$. Il est évident que si $\mathcal{C}$ est déjà une tribu, alors $\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Exemple. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{C} = \{\{a\}\}$. Alors

$$\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Définition 13. Tribu de Borel *Considérons l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}$. On appelle tribu de Borel la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts de la forme $]a, +\infty[$, où a parcourt $\mathbb{R}$.*

Cette tribu contient tous les intervalles ouverts, tous les intervalles fermés et tous les points de $\mathbb{R}$. Mais on démontre (ce qui n'est pas facile) que la tribu des boréliens, que nous noterons par $\mathcal{B}$, ne coïncide pas avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{B}$. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}$. Cette tribu jouera une rôle important dans l'étude des probabilités sur des ensembles infinis.

2.2. **Espaces probabilisables.**

Définition 14. *Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathfrak{F})$ où Ω est un ensemble, $\mathfrak{F}$ une tribu sur Ω.*

Par exemple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable. De même $(\Omega, \mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset\})$ est aussi un espace probabilisable.

Vocabulaire Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable. Alors

- Ω est appelé l'espace des épreuves.
- Les éléments de la tribu $\mathfrak{F}$ sont les évènements.
- Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé résultat. Si $\omega \in \Omega$ est un élément d'un évènement $A \in \mathfrak{F}$, on dit que A est réalisé.

Exemple. Considérons l'ensemble à deux éléments

$$\Omega = \{p, f\}.$$

Cet espace des épreuves peut, par exemple, correspondre aux résultats d'un lancer d'une pièce de monnaie. Prenons

$$\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\{p, f\}, \emptyset, \{p\}, \{f\}\}.$$

Considérons le résultat p. Alors les évènements suivants sont réalisés:

$$\Omega, \{p\}.$$

Notons que l'évènement Ω est toujours réalisé, quel que soit le résultat $\omega \in \Omega$.

Définition 15. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espace probabilisable et soit* $\omega \in \Omega$ *un résultat. Deux évènements* $A, B \in \mathfrak{F}$ *sont dits réalisés simultanément si* $\omega \in A \bigcap B$.

Ceci implique, en particulier que $A \bigcap B \neq \emptyset$. Lorsque les évènements A et B vérifient $A \bigcap B = \emptyset$, on dit qu'ils sont incompatibles.

2.3. **Probabilités. Espaces probabilisés.**

Définition 16. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espace probabilisable. Une fonction*

$$P : \mathfrak{F} \to [0, 1]$$

est appelée une probabilité sur cet espace si

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) *Si* $A, B \in \mathfrak{F}$ *avec* $A \cap B = \emptyset$, *c'est-à-dire si* A *et* B *sont deux évènements incompatibles, alors*

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$$

(3) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements deux à deux incompatibles* ($A_n \in \mathfrak{F}$ *pour tout* n *et si* $n \neq m$ *alors* $A_n \bigcap A_m = \emptyset$), *alors*

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Remarque. La condition (3) est, de toute évidence, une généralisation de la condition (2). Il faut noter que les outils mathématiques utilisés dans cette propriété sont délicats. En effet $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ n'est pas une somme classique mais une "somme infinie" qui est définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} P(A_p).$$

Une telle limite de somme finie est appelée une série numérique. On pourra se documenter sur les séries dans l'ouvrage *Séries et Intégrales, L2PC*, également édité sur ce site :

http://livres-mathematiques.fr

Proposition 3. *Soit* P *une probabilité sur l'espace* $(\Omega, \mathfrak{F})$. *Alors*

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) *Pour tout* $A \in \mathfrak{F}$, $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$.

(3) *Si* $A, B \in \mathfrak{F}$ *sont deux évènements pas nécessairement incompatibles, alors*

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Démonstration.

(1) Les évènements Ω et $\emptyset$ sont incompatibles. Donc
$$P(\Omega \bigcup \emptyset) = P(A) = P(A) + P(\emptyset).$$
Donc $P(\emptyset) = 0$.

(2) Les évènements A et $\Omega - A$ sont incompatibles. Donc
$$P(A \bigcup (\Omega - A)) = P(A) + P(\Omega - A).$$
Or $A \bigcup (\Omega - A) = \Omega$ et donc $P(A \bigcup (\Omega - A)) = P(\Omega) = 1$. Ainsi
$$P(A) + P(\Omega - A) = 1,$$
d'où la propriété.

(3) On vérifie facilement:
$$A \bigcup B = A \bigcup ((\Omega - A) \cap B), \quad B = (A \cap B) \bigcup ((\Omega - A) \cap B.$$
Comme les évènements A et $(\Omega - A) \bigcap B$ sont incompatibles, alors
$$P(A \bigcup B) = P(A \bigcup ((\Omega - A) \cap B)) = P(A) + P((\Omega - A) \bigcap B)).$$
De même, on aura
$$P(B) = P(A \cap B) \bigcup ((\Omega - A) \cap B) = P(A \bigcap B) + P((\Omega - A) \bigcap B)).$$
Ainsi
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Exemples

(1) Soit $\Omega = \{p, f\}$. On considère la tribu $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application
$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$
définie par
$$P(\{p\}) = \frac{1}{2} = P(\{f\}), \ P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$
est une probabilité sur cet espace.

(2) Soit $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$. On considère la tribu $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application P définie à partir de
$$P(\{pp\}) = P(\{pf\}) = P(\{fp\}) = P(\{ff\}) = \frac{1}{4}$$
s'étend en une probabilité. Ceci signifie qu'il existe une unique loi de probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ dont la restriction aux évènements élémenatires est donnée par la relations ci-dessus. En particulier si $A = \{pp, pf, fp\}$ qui correspond à l'évènement d'avoir au moins pile dans deux lancers d'une pièce, alors $P(A) = \dfrac{3}{4}$ d'après la propriété (3).

(3) Soit Ω un ensemble fini et considérons l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Supposons que Ω contienne N éléments x_i, $i = 1, \cdots, N$. Considérons la probabilité définie à partir de
$$p_i = P(\{x_i\}) = \frac{1}{N}.$$

Chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Alors si A est un évènement contenant r éléments, on aura

$$P(A) = \frac{r}{N}.$$

Dans les exemples ci-dessus, l'espace probabilisable était fini. Donnons des exemples dans le cas où Ω est un espace infini. Soit $\Omega = \mathbb{R}$. On peut admettre l'impossibilité de définir une probabilité si l'ensemble $\mathfrak{F}$ des évènements est $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, Il nous faut donc définir $\mathfrak{F}$ de manière à pouvoir construire une probabilité. C'est pour cela que l'on considère la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ dfinie dans la Définition 13. Rappelons en la construction: On considère que $\mathfrak{F}$ est formé de tous les segments

$$[x_1, x_2]$$

de leurs réunions dénombrables et de leurs intersections. En particulier les sous-ensembles $]-\infty, x_1]$ sont dans $\mathfrak{F}$. En fait $\mathfrak{F}$ est la plus petite tribu contenant ces sous-ensembles. On vérifie que $\mathfrak{F}$ contient tous les intervalles, ouverts, fermés, semi-ouverts, il contient aussi les singletons $\{x\}$ mais $\mathfrak{F}$ est strictement contenu dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Définissons à présent une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1.$$

Considérons l'évènement $A =]-\infty, x_1]$ et posons

$$P(A) = P(]-\infty, x_1]) = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx.$$

Ceci permet de définir $P(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. En particulier

$$P(]x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)dx.$$

Ceci se déduit du fait que les évènements $]-\infty, x_1]$ et $]x_1, x_2]$ sont incompatibles. Donc

$$P(]-\infty, x_1] \bigcup]x_1, x_2]) = P(]-\infty, x_1]) + P(]x_1, x_2]).$$

Comme $]-\infty, x_1] \bigcup]x_1, x_2] =]-\infty, x_2]$, on obtient

$$P(]-\infty, x_2]) = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)dx = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx + P(]x_1, x_2]).$$

Ainsi

$$P(]x_1, x_2]). = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)dx.$$

On définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ à partir de la fonction α.

Définition 17. *On appelle espace probabilisé un triplet* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *où* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *est un espace probabilisable et* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathfrak{F})$.

2.4. **Evènements négligeables. Evènements indépendants.** Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 18. *Un évènement $A \in \mathfrak{F}$ est dit négligeable si sa probabilité est nulle:*
$$P(A) = 0.$$

Considérons par exemple l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$ où P est la probabilité définie par
$$P(]-\infty, x_1]) = \int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx$$
où α est une fonction vérifiant
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1.$$
Alors chacun des évènements élémentaires $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ est négligeable.

Définition 19. *Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Deux évènements $A, B \in \mathfrak{F}$ sont dits indépendants si*
$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Cette notion d'indépendance est fondamentale pour la suite. Elle ne concerne que deux évènements. Pour trois (ou plus) évènements, nous avons la définition suivante

Définition 20. *Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Trois évènements $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ sont dits indépendants si*

(1) $P(A_i \bigcap A_j) = P(A_i)P(A_j), \ i \neq j \in \{1, 2, 3\}$,
(2) $P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Exemple. On considère l'expérience relative à un lancer de deux dés équilibrés. On a alors
$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \cdots, (2, 6), \cdots, (6, 1), \cdots, (6, 6)\}.$$
Cet ensemble fini contient donc $6 \times 6 = 36$ éléments. On considère l'évènement A correspondant à la somme des dés est paire:
$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \cdots, (6, 6)\}.$$
Comme les dés sont équilibrés,
$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$
Considérons maintenant l'évènement correspondant au premier dé est pair. On a
$$B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), \cdots, (4, 1), (4, 2), (4, 3), \cdots, (6, 1), (6, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\}$$
et on a
$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$
L'évènement $A \cap B$ correspond aux deux dés sont pairs, soit
$$A \cap B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), \cdots, (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

et on a
$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$
Comme $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, on déduit
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
et les évènements A et B sont indépendants.

2.5. **Formule de Poincaré.** Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ sont deux évènements, nous avons vu que
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$
La formule de Poincaré donne la probabilité d'un évènement du type $A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ en fonctions des probabilités des évènements A_i et toutes les intersections. A titre d'exercice, on démontrera le cas $n = 3$. Dans ce cas la formule s'´crit:

Proposition 4. *Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Alors on a :*
$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \ & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \bigcap A_2) - P(A_1 \bigcap A_3) - P(A_2 \bigcap A_3) \\ & + P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3). \end{aligned}$$

On notera, dans cette formule, la règle des signes: le signe + devant les $P(A_i)$, le signe − devant les intersections de deux évènements, le signe + devant l'intersection de trois évènements. Ceci permet de mieux comprendre la formule générale:

Proposition 5. *Soient $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{F}$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Alors on a :*
$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n) = \ & P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - \left(\textstyle\sum_{i \neq j \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j)\right) \\ & + \left(\textstyle\sum_{i \neq j \neq k \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k)\right) + \cdots + \\ & + (-1)^n P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \end{aligned}$$

3. Probabilités conditionnelles

3.1. **Définition.**

Définition 21. *Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathfrak{F}$ deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant B le rapport*
$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

Il est clair que la probabilité conditionnelle de A sachant l'évènement total Ω est égal à $P(A)$. De même si B est un évènement tel que $B \subset A$, alors $A \bigcap B = B$ et $P(A|B) = 1$.

Exemples.

(1) Supposons que Ω soit un ensemble fini. Notons par n_A, n_B et n le nombre d'éléments de A, B et Ω. Supposons que P soit uniforme, c'est-à-dire
$$P(A) = \frac{n_A}{n},\ P(B) = \frac{n_B}{n}.$$
Alors si $n_{A\cap B}$ est le nombre d'éléments de $A \bigcap B$,
$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}.$$
Si de plus, ces évènements sont indépendants, alors $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$ ce qui donne
$$P(A \bigcap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n} = \frac{n_A}{n}\frac{n_B}{n} = \frac{n_A n_B}{n^2}$$
soit
$$n_{A\cap B} = \frac{n_A n_B}{n}.$$
On a alors
$$P(A|B) = \frac{n_A n_B}{n}\frac{1}{n_B} = \frac{n_A}{n} = P(A).$$

(2) On considère une urne contenant 3 boules blanches B_1, B_2, B_3 et 2 boules rouges R_1, R_2. On tire successivement 2 boules. On veut trouver la probabilité de l'évènement correspondant la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. La probabilité pour que la première boule tirée soit blanche est $\frac{3}{5}$. Cela correspond à l'évènement$A$ constitué de tous les couples (B_i, B_j) et (B_i, R_k) $i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$ et $k = 1, 2$. La probabilité de tirer une deuxième boule rouge sachant que la première est blanche est égal à $\frac{2}{4}$. Si B est l'évènement la deuxième boule est rouge, alors $A \bigcap B$ est l'évènement la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. on a
$$P(A \bigcap B) = P(A|B).P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

3.2. **Le théorème de Bayes.**

Théorème 1. *Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathfrak{F}$ deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors*
$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration. La démonstration résulte directement des formules de définition de la probabilité conditionnelle.

Ce résultat se généralise de la façon suivante

Théorème 2. *Soient* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $\{A_1, \cdots, A_k\}$ *une partition de* Ω *telle que chaque* $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \cdots, k$ *et* $P(A_i) \neq 0$. *Alors pour tout évènement* $B \in \mathfrak{F}$, *on a*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_k) \cdot P(A_k)}$$

pour $i = 1, \cdots, k$.

Démonstration. Comme $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une partition de Ω, alors pour tout sous-ensemble B de Ω on a

$$B = B \bigcap (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = (B \cap A_1) \bigcup (B \cap A_2) \bigcup \cdots \bigcup (B \cap A_k).$$

Comme les évènements $B \bigcap A_i)$ sont mutuellement incompatibles, alors

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k).$$

Mais

$$P(B \bigcap A_i) = P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Ainsi

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_k) \cdot P(A_k).$$

Mais

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}.$$

Ainsi

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_k) \cdot P(A_k)}.$$

EXERCICES

Exercice 1. *Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer que si*

$$A\bigcup C \subset A\bigcup B \ \text{ et } A\bigcap C \subset A\bigcap B$$

alors

$$C \subset B.$$

Exercice 2. *Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer*

(1) $A \subset B$ *si et seulement si* $A\bigcup B = B$
(2) $A \subset B$ *si et seulement si* $\complement_E A\bigcup B = E$

Exercice 3. *Démontrer les lois de Morgan.*

Exercice 4. *Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.*

Exercice 5. *Soit E un ensemble fini de n éléments. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

Exercice 6. *Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E et f une application de E dans un ensemble F. Montrer que*

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *et donner un exemple où l'égalité est fausse.*

Exercice 7. *Dans une classe de 32 élèves, 21 parlent l'anglais et 18 l'allemand. On suppose que chaque élève parle au moins une de ces langues. Combien d'élèves parlent à la fois l'anglais et l'allemand?*

Exercice 8. *Soient A et B deux ensembles. On appelle différence symétrique de ces deux ensembles, l'ensemble*

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Si n et le cardinal de A et p celui de B, calculer le cardinal de $(A\Delta B)$.

Exercice 9. *Combien y a-t-il d'entiers compris entre* 1 *et* 999 *et ne contenant pas* 0*?*

Exercice 10. *Quel est le nombre de tiercés possibles dans une course comptant 15 chevaux? Quelle est la chance de gagner dans un tiercé dans le désordre?*

Exercice 11. *M. Usald doit créer un code de sécurité à 6 chiffres pour son smartphone.*

(1) *Combien de codes peut-il créer ?*
(2) *Il souhaite modifier son code. Il décide de ne jamais utiliser le chiffre* 0*. Combien de codes peut-il créer ?*

(3) *Si maintenant il décide seulement de ne jamais utiliser le même chiffre, mais s'autorise à choisir le* 0. *Combien de codes peut-il créer ?*
(4) *Il a oublié son code, il sait seulement qu'il se termine par* 5 *et qu'il l'a choisi comme dans la question précédente. Combien de codes différents sont alors possibles?*

Exercice 12. *Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble des allèles* $E = \{A; B; O\}$.

(1) *On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents (l'ordre ne compte pas pour les allèles). Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.*
(2) *On appelle homozygote un gène qui est représenté par deux allèles identiques. Quel est le nombre d'homozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.*
(3) *On appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Quel est le nombre de génotypes et listez-les.*
(4) *Le groupe sanguin est alors déterminé par ces génotypes sachant que :*
   - *l'allèle* A *est dominante sur l'allèle* O, *donc par exemple* $\{A; O\}$ *donne le groupe* A,
   - *l'allèle* B *est dominante sur l'allèle* O, *donc par exemple* $\{B; O\}$ *donne le groupe* B.

   Montrer que l'on a bien 4 *groupes sanguins :* $\{A, B, AB, O\}$.

Exercice 13. *On considère l'expérience suivante: on lance par trois fois une pièce de monnaie.*

(1) *Déterminer l'espace probabilisable correspondant.*
(2) *On suppose que chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Déterminer la probabilité de l'évènement correspondant à faire au moins une fois pile.*
(3) *Même question mais en considérant l'évènement suivant: faire au moins deux fois pile dans les trois lancers.*

Exercice 14. *Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?*

(1) *Deux évènements incompatibles sont indépendants.*
(2) *Deux évènements indépendants sont incompatibles.*
(3) *Si* $P(A) + P(B) = 1$ *alors* $B = \complement_E A$.
(4) *Si* A *et* B *sont deux évènements indépendants, alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 15. *On considère l'espace probabilisable* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *où* $\mathfrak{B}$ *est la tribu des boréliens. Soit* $\alpha(x)$ *la fonction définie par*

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) *Montrer que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 1$.
(2) *En déduire que* $P(]-\infty, x_1]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)dx$ *définit une probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.
(3) *Calculer* $P(\{x\})$.

Exercice 16. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *un espace probabilisable. Soit* $a \in \Omega$ *en élément donné dans* Ω*. Considérons l'application*

$$P : \mathfrak{F} \to [0, 1]$$

définie par

$$P(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A, \\ 0 \text{ si } a \notin A, \end{cases}$$

pour tout $A \in \mathfrak{F}$*. Montrer que* P *est une probabilité.*

Exercice 17. *Soient* $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ *trois évènements d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$*. Montrer que*

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \quad & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \bigcap A_2) - P(A_1 \bigcap A_3) - P(A_2 \bigcap A_3) \\ & + P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3). \end{aligned}$$

Exercice 18. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé. Fixons un évènement* $M \in \mathfrak{F}$ *tel que* $P(M) \neq 0$*. Montrer que l'application*

$$P_M : \mathfrak{F} \to [0, 1]$$

donnée par

$$P_M(A) = P(A|M)$$

est une probailité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$*.*

Exercice 19. *L'ensemble* $\mathcal{B} = \{\{n, \cdots, p\},\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ n \leq p\}$ *forme-t-il une tribu sur* $\mathbb{N}$*?*

Exercice 20.
(1) *Déterminer une probabilité* P *sur* $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ *de sorte que* $P(\{k\})$ *soit proportionnel à* k *pour tout* k *tel que* $1 \leq k \leq n$*.*
(2) *Déterminer une probabilité* P *sur* $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ *de sorte que* $P(\{1, \cdots, k\}$ *soit proportionnel à* k^2 *pour tout* k *tel que* $1 \leq k \leq n$*.*

Exercice 21. *Une usine de composants électriques fabrique* 4 *types de composants et les stocke dans* 4 *compartiments. Le premier compartment contient* 2000 *interrupteurs, le deuxième* 1000 *prises le troisième* 1000 *disjoncteurs et le dernier* 500 *douilles. On estime que* 10 *pour* 100 *des interrupteurs, des disjoncteurs et des prises sont défectueux et que* 20 *pour cent des douilles sont défectueuses. On prélève au hasard un composant dans un des compartiments.*

(1) *Trouver la probabilité pour que le composant choisi soit défectueux.*
(2) *Si le composant choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du quatrième compartiment?*

Exercice 22. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé. Soient* $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$ *trois évènements de même probabilité* $\frac{1}{7}$*. Quelle est la probabilité des évènements* $A_i \bigcap A_j$ *et* $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ *pour que les évènements soient indépendants?*

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 Pour montrer que $C \subset B$ nous allons montrer que tout élément de C est dans B. Soit $x \in C$. Alors $x \in A \bigcup C$. Donc par hypothèse $x \in A \bigcup B$.

- Supposons $x \notin A$. Alors $x \in A \bigcup B$ implique $x \in B$.

- Supposons $x \in A$. Comme $x \in C$, on a donc $x \in A \bigcap C$. Comme par hypothèse $A \bigcap C \subset A \bigcap B$, on en déduit $x \in A \bigcap B$ et donc $x \in B$.

On peut donc conclure que dans tous les cas, $x \in B$.

Exercice 2 Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E.

(1) Montrons que $A \subset B$ si et seulement si $A \bigcup B = B$.
Montrons tout d'abord que $A \subset B \Rightarrow A \bigcup B = B$. Par définition de la réunion de deux ensembles, $B \subset A \bigcup B$. Montrons maintenant que $A \bigcup B \subset B$. Soit $x \in A \bigcup B$. Comme par hypothèse $A \subset B$, tout élément de A est dans B et donc $A \bigcup B \subset B$.
Montrons que $A \bigcup B = B$ implique $A \subset B$. Soit $x \mathfrak{n} A$. Alors $x \in A \bigcup B$ et donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$.

(2) Montrons que $A \subset B$ si et seulement si $\complement_E A \bigcup B = E$. D'après la première question $A \subset B$ si et seulement si $A \bigcup B = B$. Ainsi $A \subset B$ implique $\complement_E A \bigcup A \bigcup B = \complement_E A \bigcup B$. Comme $\complement_E A \bigcup A = E$ et $E \bigcup B = E$ on a bien $A \subset B$ implique $\complement_E A \bigcup B = E$. Supposons à présent que $\complement_E A \bigcup B = E$. Soit $x \in A$. Comme A est un sous-ensemble de E, on a $x \in E$. Mais $E = \complement_E A \bigcup B$ donc $x \in \complement_E A \bigcup B$ c'est-à-dire $x \in \complement_E A$ ou $x \in B$. Mais $x \in A$ donc $x \notin \complement_E A$ et donc $x \in B$.

Exercice 3. Lois de Morgan. Soient A et B deux sous-ensembles de E.

(1) La première loi s'énonce:

$$\complement_E(A \bigcup B) = \complement_E A \bigcap \complement_E B.$$

Soit $x \in \complement_E(A \bigcup B)$. Alors $x \notin A \bigcup B$ c'est-à-dire, $x \notin A$ et $x \notin B$. Ainsi $x \in \complement_E A$ et $x \in \complement_E B$. D'où $x \in \complement_E A \bigcap \complement_E B$ et $\complement_E(A \bigcup B) \subset \complement_E A \bigcap \complement_E B$.
Supposons maintenant $x \in \complement_E A \bigcap \complement_E B$. Alors $x \in \complement_E A$ et $x \in \complement_E B$. Ainsi $x \notin A$ et $x \notin B$. D'où $x \notin A \bigcup B$ ce qui signifie $x \in \complement_E(A \bigcup B)$. On en dduit $\complement_E A \bigcap \complement_E B \subset \complement_E(A \bigcup B)$ et la première loi est démontrée.

(2) La deuxième loi s'énonce

$$\complement_E(A \bigcap B) = \complement_E A \bigcup \complement_E B.$$

Soit $x \in \complement_E(A \bigcap B)$. Alors $x \notin A \bigcap B$ c'est-à-dire, $x \notin A$ ou $x \notin B$. Ainsi $x \in \complement_E A$ ou $x \in \complement_E B$. D'où $x \in \complement_E A \bigcup \complement_E B$ et $\complement_E(A \bigcap B) \subset \complement_E A \bigcup \complement_E B$.
Supposons maintenant $x \in \complement_E A \bigcup \complement_E B$. Alors $x \in \complement_E A$ ou $x \in \complement_E B$. Ainsi $x \notin A$ ou $x \notin B$. D'où $x \notin A \bigcap B$ ce qui signifie $x \in \complement_E(A \bigcap B)$. On en dduit $\complement_E A \bigcup \complement_E B \subset \complement_E(A \bigcap B)$ et la deuxième loi est démontrée.

Exercice 4. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) = \ & \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ & \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, E\}.\end{aligned}$$

Exercice 5. Montrons par récurrence sur le nombre d'éléments n de E que $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments.

1. Initialisation. La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet dans ce cas $E = \emptyset$ et $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et contient bien $2^0 = 1$ élément.

2. Supposons la propriété vraie pour un entier $k \geq 0$ donné. Soit E un ensemble contenant $k+1$ éléments. Soit a un élément sélectionné dans E et soit $E' = E - \{a\}$. Cet ensemble E' contient k éléments et d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(E')$ contient 2^k éléments. Or les sous-ensembles de E sont les sous-ensembles de E' car $E' \subset E$ plus tous les sous-ensembles de E qui contiennent a. Ces derniers correspondent aux sous-ensembles de E'. Ainsi le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à deux fois celui de E', soit $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ éléments.

3. Conclusion. La propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6.

1. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

a) Soit $y \in f(A \cup B)$ Il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in A$ ou $x \in B$ et donc $f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B)$. Ainsi $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

b. Inversement soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Il existe donc $a \in A$ et donc $a \in A \cup B$ tel que $y = f(a)$ ou il existe $b \in B$ et donc $b \in A \cup B$ tel que $y = f(b)$. Ainsi $y \in f(A \cup B$ et $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On en déduit $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tels que $y = f(x)$. Mais $x \in A$ et $x \in B$ et donc $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$. On en déduit $f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

Remarque. Notons que la réciproque de cette propriété est fausse. Considérons par exemple

$$A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, f(0) = f(2) = 0, f(1) = 1.$$

Alors

$$f(A \cap B) = f(\{1\}) = \{1\}, f(A) \cap f(B) = \{0, 1\}.$$

Exercice 7. Soit A l'ensemble des élèves qui parrlent anglais, B l'ensemble des élèves qui parlent allemand. On a

$$\mathrm{Card}(A) = 21, \mathrm{Card}(B) = 18, \mathrm{Card}(A \cup B) = 32.$$

Mais

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

On en déduit

$$\mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cup B) = 21 + 18 - 32 = 7.$$

Il y a donc 7 élèves qui parlent ces deux langues.

Exercice 8.

$$\mathrm{Card}(A \Delta B) = \mathrm{Card}(A \cup B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Exercice 9. Il y a 9 nombres sans zéro compris entre 1 et 9. Il y a 9×9 nombres sans zéro compris entre 11 et 99. Il y a $9 \times 9 \times 9$ nombres sans zéro compris entre 111 et 999. Donc Il y a $9 + 81 + 729 = 819$ nombres sans zéro compris entre 1 et 1000.

Exercice 10. Le nombre de tiercés possibles dans une course comptant 15 chevaux correspond au nombre d'arrangements $A_{15}3$. Rappelons que si E est un ensemble fini contenant n éléments, pour tout entier p non nul, le nombre d'arrangements p à p de E est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On a donc ici

$$A_{15}3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13.$$

Le nombre de tiercés dans le désordre dans une course comptant 15 chevaux correspond au nombre de combinaisons $C_{15}3$. Rappelons que si E est un ensemble fini contenant n éléments, pour tout entier p non nul, le nombre de combinaisons p à p de E est

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

On a donc

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{(12)!3!} = \frac{12!}{3!} = 5 \times 7 \times 13.$$

Ainsi la probabilité de gagner dans le désordre est

$$p = \frac{1}{5 \times 7 \times 13}.$$

Exercice 11. Rappelons que si E est un ensemble fini contenant n éléments, pour tout entier p non nul, le produit cartésien E^p contient p^n éléments.

(1) Si $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, un code à 6 chiffres est un élément de E^{10}. Il y a donc 10^6 codes possibles.
(2) Si $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, un code à 6 chiffres est un élément de E^{10}. Il y a donc 9^6 codes possibles.
(3) Ici $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, le nombre de codes est le nombre d'arrangements de 6 éléments de E soit

$$A_{10}6 = \frac{10!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5.$$

(4) On peut considérer ici $E = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$ (sans le 5). Le nombre de codes est donc

$$A_9 6 = \frac{9!}{3!} = 9 \times 8 \times 7 \times 5.$$

Exercice 12. Soit $\Omega = \{(A,A),(A,B),(A,O),(B,B),(B,O),(O,O)\}$ (l'ordre ne compte pas pour les allèles).

(1) Les gènes hétérozygotes sont $(A,B),(A,0),(B,O)$. Il y en a trois.
(2) Les gènes homozygotes sont $(A,A),(B,B),(O,O)$. Il y en a trois.
(3) Le nombre de génotypes est le cardinal de Ω soit 6.
(4) (A,A) et (A,O) donnent le groupe sanguin A, (B,B) et (B,O) donnent le groupe sanguin B, (O,O) donnenle groupe sanguin 0 et (A,B) donne le groupe sanguin AB.

Exercice 13. Si p dsigne "pile" et $f$désigne "face" alors

(1) l'univers est $\Omega = \{ppp, ppf, pfp, fpp, pff, fpf, ffp, fff\}$. Son cardinal vaut $2^3 = 8$.

(2) L'évènement A correspondant à faire au moins une fois pile est

$$A = \{ppp, ppf, pfp, fpp, pff, fpf, ffp\}.$$

Ainsi sa probabilité est

$$P(A) = \frac{7}{8}.$$

(3) L'évènement B correspondant à faire au moins deux fois pile est

$$B = \{ppp, ppf, pfp\}.$$

Ainsi sa probabilité est

$$P(B) = \frac{4}{8}.$$

Exercice 14. Rappelons que deux évènements sont

- incompatibles si $A \cap B = \emptyset$,
- indépendants si $PA \cap B) = P(A)P(B)$.

(1) Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$. D'où $P(A \cap B) = 0$. Supposons $P(A)$ et $P(B)$ non nuls alors $P(A)P(B) \neq 0$ et A et B ne sont pas indépendants.
(2) Si A et B sont indépendants. Supposons $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$. Alors $P(A \cap B) = P(A)P(B) \neq 0$. Donc $A \cap B \neq \emptyset$ et A et B ne sont pas incompatibles.
(3) Faux: Soit A tel que $P(A) = 0,5$ et $B = A$. Alors $P(A) + P(B) = 1$ mais $B \neq \overline{A}$.
(4) Faux: Si A et B sont indépendants de probabilité non nulle alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$