CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique. RCP 103

Mathématiques : Modélisation markovienne

Cours Elisabeth Remm

Chapitre 2

Variables aléatoires

Table des matières

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. En général l'ensemble Ω est un ensemble relativement compliqué sur lequel il est difficile de faire des opérations mathématiques. Imaginons par exemple, une étude sur la population des anchois en Méditérannée. Cette population est difficilement discernable. D'où l'idée naturelle de remplacer cet ensemble Ω par un ensemble mathématique plus accessible aux opérations, $\mathbb{R}$, par exemple, en privilégiant un caractère particulier de Ω.

1. Variables aléatoires finies

Dans tout ce paragraphe, nous considèrerons que l'espace probabilisé Ω est un ensemble fini. Dans ce cas, nous pouvons supposer que la tribu correspondante est $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.1. **Définition d'une variable aléatoire finie.** Sous cette hypothèse, la notion de variable aléatoire, parfois appelée caractère, est très simple :

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé fini. On appelle variable aléatoire sur cet espace toute fonction*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Une telle variable aléatoire est dite finie.

Une variable aléatoire prend, dans ce cas fini, qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \cdots, x_s$ que nous convenons de classer dans le sens croissant :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_s.$$

L'ensemble fini $\Omega_X = \{x_1, \cdots, x_s\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appelé l'ensemble fondamental de la variable aléatoire X. Nous voyons déjà l'intérêt de cette notion de variable aléatoire, nous transposons l'étude des probabilités dans des sous-ensembles (ici finis) de $\mathbb{R}$, alors que l'ensemble de base Ω était plus ou moins bien défini mathématiquement.

Pour chacune de ces valeurs x_i, nous pouvons considérer le sous-ensemble

$$X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_i\}.$$

Attention à la notation X^{-1} qui ne signifie pas prendre l'inverse ou la fonction réciproque de X qui n'existe pas en général. Mais cet ensemble $X^{-1}(x_i)$ est l'ensemble de tous les évènements élémentaires ω qui ont pour image le réel fixé x_i, et par définition de x_i, cet ensemble est non vide.

On s'intéressera également au sous-ensemble de Ω défini par

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq x\}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $x < x_1$, il est clair que cet ensemble est vide. Si $x_i \leq x < x_{i+1}$, alors

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(x_1) \cup \cdots \cup X^{-1}(x_i).$$

De même, on définit pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, le sous-enesemble de Ω :

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega, \quad a \leq X(\omega) \leq b\}.$$

1.2. **Exemples.**

(1) Soit Ω l'ensemble des épreuves consistant à mesurer tous les habitants de Mulhouse. La fonction : " à un individu on fait correspondre sa taille" est une variable aléatoire.

(2) La fonction qui à un dé fait correspondre sa marque est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a
$$\Omega = \Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(3) Considérons toujours le lancer d'un dé cubique. La fonction Y qui aux marques paires fait correspondre 1 et aux impaires 0 est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
et
$$\Omega_Y = \{0, 1\}.$$
Notons que
$$Y^{-1}(0) = \{1, 3, 5\}$$
et
$$Y^{-1}(1) = \{2, 4, 6\}.$$

(4) Soit Ω l'ensemble des élèves de la classe, $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui à un élève fait correspondre son âge "entier" (c'est à dire que l'on considère que l'on arrondi à l'entier inférieur) est une variable aléatoire et
$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$
correspondra à l'ensemble des élèves qui ont moins de $[x]$ ans ou $[x]$ ans, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x.

(5) Considérons le lancer d'un dé et notons par f_i la face du dé correspondant au chiffre i. Alors $\Omega = \{f_1, \cdots, f_6\}$ et X donnée par $X(f_i) = i$ est une variable aléatoire.

(6) On note par p et f les côtés pile et face d'une pièce de monnaie. L'expérience associée au lancer de cette pièce correspond à $\Omega = \{p, f\}$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par
$$X(p) = 1, \ X(f) = 0$$
est une variable aléatoire sur Ω. Si nous considérons maintenant l'expérience associée à n lancers successifs, alors $\Omega_1 = \Omega^n$. Un évènements élémentaire est un mot du type $\omega = ppffp...f$ de longueur n écrit avec les seules lettres p et f. L'application
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
définie par
$$X(\omega) = \text{nombre de lettres } p \text{ dans le mot } \omega$$
est une variable aléatoire. Elle décrit le nombre de fois où pile est obtenu au cours de n lancers successifs.

1.3. **Loi de probabilité d'une variable aléatoire.**

Définition 2. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé fini et soit* X *une variable aléatoire sur cet espace. La loi de probabilité de* X *est la probabilité sur* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$P_X(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}).$$

En particulier on a :

$$P_X(]a, b]) = P(\{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\})$$

ou bien

$$P_X(\{x\}) = P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}).$$

Remarquons que P_X est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Posons $\Omega_X = \{x_1, \cdots, x_N\}$. Cette loi de probabilité est entièrement déterminée par les couples (x_i, p_i) avec

$$p_i = P(X^{-1}(x_i)).$$

Notons que

$$p_1 + \cdots + p_N = 1.$$

Exemples.

(1) Une urne contient 3 boules, deux rouges et une blanche. On effectue trois tirages successifs sans remise et on note le rang d'apparition de la boule blanche.
Ici $\Omega = \{(r, r, b), (r, b, r), (b, r, r)\}$ correspondant au tirage des trois boules et la variable aléatoire

$$X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$$

correspond au rang de la boule blanche. La loi de X est donc

$$P_X(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2/3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

On a aussi

$$p_1 = P(X^{-1}(1)) = p_2 = P(X^{-1}(2)) = p_3 = P(X^{-1}(3)) = 1/3.$$

(2) On lance un dé deux fois successivement. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres sortis. Ici

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}.$$

C'est un ensemble fini contenant 36 éléments. La variable aléatoire est la fonction

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$X((i, j)) = i + j$$

avec $(i, j) \in \Omega$. Ainsi X est à valeurs dans $\{2, 3, \cdots, 12\}$. On a, par exemple,

$$P_X(2) = \frac{1}{36}.$$

Plus généralement la loi de probabilité de X vérifie

$$\begin{cases} P_X(k) = \dfrac{k-1}{36} & \text{si } 2 \leq k \leq 6, \\ P_X(k) = \dfrac{13-k}{36} & \text{si } 7 \leq k \leq 12. \end{cases}$$

Remarque. Rappelons que $P(X = x)$ signifie $P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\})$. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. C'est un ensemble fini. Posons

$$A = \{\omega_1, \cdots, \omega_p\}.$$

Alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^{p} P(\{\omega_k\}).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $A = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$.. Alors

$$P_X(]-\infty, x]) = P(A).$$

On en déduit bien, que la donnée des valeurs $P(X = x)$ détermine complètement la loi de X.

1.4. **La loi de Bernoulli, loi binomiale.** Les variables aléatoires correspondant aux lois de Bernoulli et binomiale sont fondamentales en probabilité. La loi de Bernoulli correspond à une expérience à deux issues, succès et echec et p est la probabilité pour avoir un succès. La loi binomiale correspond au résultat de la somme de n expériences indépendantes, chacune d'elles suivant la loi de Bernoulli.

Définition 3. *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ et soit $p \in [0, 1]$.*

1. *On dit X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et*
$$P_X(\{1\}) = p,\ P_X(\{0\}) = 1 - p.$$
On note cette loi $\mathcal{B}(1, p)$.
2. *On dit X suit la loi binomiale de paramètre n et p si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et*
$$P_X(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$. On note cette loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Comme X est finie, sa loi est bien déterminée dès que l'on connait les probabilités des singletons $\{k\}$. On peut vérifier à titre d'exercice que si X suit la loi de binomilale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, alors

$$P_X(\mathbb{R}) = P_X(\{0, 1, \cdots, n\}) = \frac{1}{2}^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2}^n (1+1)^n = 1.$$

1.5. **Somme et produit de variables aléatoires.** Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ on peut définir la somme et le produit de ces deux applications :

$$X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_l\}$, alors

$$(X + Y)(\Omega) = \{x_i + y_j,\ i = 1, \cdots, p,\ j = 1, \cdots, l\}.$$

On définit de même le produit

$$XY : \Omega \to \mathbb{R}$$

par

$$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_l\}$, alors

$$(XY)(\Omega) = \{x_i y_j,\ i = 1, \cdots, p,\ j = 1, \cdots, l\}.$$

1.6. **Image d'une variable aléatoire.** Soit X une variable aléatoire sur l'espace fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et soit

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction (continue, dérivable, indéfiniment de fois dérivable) d'une variable réelle.

Définition 4. *On appelle variable aléatoire image de X par φ, l'application*

$$Y = \varphi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(X)(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

On a donc, si $Y = \varphi(X)$:

$$Y(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

On a bien une variable aléatoire finie qui prend les valeurs $\varphi(x_i)$.

1.7. **Fonction de répartition.** Rappelons la convention :

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega,\ X(\{\omega) \leq x\}.$$

Définition 5. *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique*

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut voir facilement que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(1) $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

(2) Pour tout x, $0 \leq F_X(x) \leq 1$

(3) F est une fonction croissante.

Comme Ω est fini, la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_s$ et nous pouvons supposer $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$. Posons

$$P_X(\{x_i\}) = p_i.$$

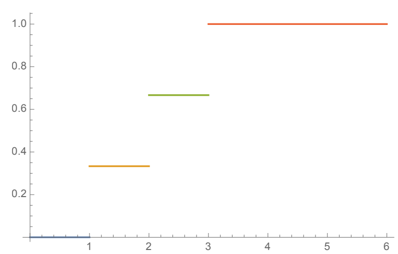
Alors la fonction de répartition F_X est une fonction en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux, croissante vérifiant

(1) $F_X(x) = 0$ pour tout $x < x_1$,

(2) $F_X(x) = p_1 + \cdots + p_i$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$

(3) $F_X(1)$ pour tout $x \geq x_s$

Elle est discontinue pour $x = x_1, \cdots, x_s$, le saut de discontinuité est égal à p_i en chacun de ces points x_i. Le graphe d'une fonction de répartition ressemble à :



Exemples.

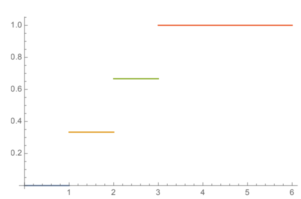
(1) **La loi de Dirac.** Une variable aléatoire X sur l'espace $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ suit la loi de Dirac d'indice $a \in \mathbb{R}$ si

$$X(\omega_i) = a$$

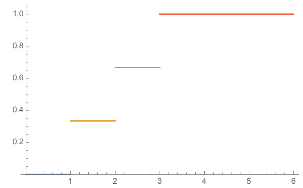
pour tout $i = 1, \cdots, n$. La Fonction de répartition vérifie donc

$$\begin{cases} F_X(x) = 0, \text{ si } x < a, \\ F_X(x) = 1, \text{ si } x \geq a. \end{cases}$$

Le graphe de $F_X(x)$ est (ici $a = 2,5$) :



(2) Soit X une variable aléatoire sur Ω dont la loi est celle de Bernoulli. On dira dans ce cas que X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p si elle prend les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Sa fonction de répartition est (ici $p = 1/3$) :



Proposition 1.
$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Démonstration. En effet, les évènements $\{X > x\}$ et $\{X \leq x\}$ sont disjoints et leur réunion est Ω. On en déduit

$$P(X > x) + P(X \leq x) = 1$$

d'où la proposition.

1.8. **Espérance mathématique.** Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1 < \cdots < x_s$.

Définition 6. *On appelle espérance mathématique de X (ou parfois valeur moyenne de X), le nombre réel, noté $E(X)$ défini par*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i$$

où $p_i = P(X - x_i)$.

Cette définition d'espérance se généralise en considérant les moments d'ordre k :

Définition 7. *On appelle moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$) de X le nombre réel, noté m_k, défini par*

$$m_k(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i^k p_i$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

On a donc

$$E(X) = m_1(X).$$

L'espérance s'interprète donc comme l'abscisse du centre de gravité des masses $p_1, \cdots, p_s$ et le moment d'ordre 2 comme un moment d'inertie de l'ensemble de ces masses.

Théorème 1. *On a*

(1) $m_k(X) = E(X^k)$,

(2) Si X *et* Y *sont deux variables aléatoires finies sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ **de même loi**, *alors*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y),$$

(3) si a, b *sont deux réels, alors*

$$E(aX+b) = aE(X) + b,$$

(4) Si X *et* Y *sont de plus* **indépendantes**, *alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration.

(1) La première propriété découle directement de la définition du moment d'ordre k.

(2) Les variables X et Y ont la même loi de probabilité. Ceci signifie que X prend les valeurs $x_1 < \cdots < x_s$ et Y prend les valeurs $y_1 < \cdots < y_s$ avec

$$P(X = x_i) = P(Y = y_i) = p_i.$$

Ainsi

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{s} (x_i + y_i) p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i + \sum_{i=1}^{s} y_i p_i = E(X) + E(Y).$$

(3) On suppose que le scalaire b est la variable aléatoire qui fait correspondre à tout élément de ω la valeur b. Alors

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{s} (ax_i + b) p_i = a \sum_{i=1}^{s} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{s} p_i = aE(X) + b.$$

(4) Si maintenant les variables X et Y sont de plus supposées indépendantes, alors les valeurs de XY sont les scalaires $x_i y_j$ avec $1 \leq i, j \leq s$. Comme

$$P(XY = x_i y_j) = p_i p_j,$$

alors

$$E(XY) = \sum_{i,j=1}^{s} x_i y_y p_i p_j = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i \sum_{j=1}^{s} y_y p_j = E(X)E(Y).$$

Exemples.

(1) L'espérance d'une variable de Dirac de paramètre a est

$$E(X) = a.$$

(2) L'espérance d'une variable de Bernoulli de papmètre p est

$$E(X) = p.$$

1.9. **Variance, écart-type.** Soit X une variable aléatoire et $E(X)$ son espérance. Considérons la nouvelle variable

$$Z = X - E(X)$$

où $E(X)$ est considérée comme la variable aléatoire

$$E(X)(\omega) = E(X)$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Cette variable Z est appelée l'écart de X.

Définition 8. *On a*

(1) *On appelle variance de X l'espérance de la variable écart $Z^2 = (X - E(X))^2$. On la note $V(X)$ et donc*

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

(2) *On appelle écart-type de X le scalaire $\sigma(X)$ défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

On montre facilement

Théorème 2. *On a*

$$V(X) = E((X - m_1)^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

et donc

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

Exemples.

(1) La variance et l'écart-type d'une variable de Dirac de paramètre a est nul :

$$V(X) = 0.$$

(2) La variance et l'écart-type d'une variable de Bernoulli de paramètre p est

$$V(X) = p(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

(3) Une variable aléatoire suit la loi binomiale $B(p, q, n)$ si Les valeurs de X sont $\{0, 1, \cdots, n\}$ et si la probabilité pour que $X = k$ est

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Dans ce cas

$$E(X) = np, \; V(X) = npq, \; \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

1.10. **Variables aléatoires discrètes.** Dans le cas des variables aléatoires finies, l'ensemble Ω et donc $X(\Omega)$ sont des ensembles finis. On peut généraliser cette hypothèse en supposant que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable (comme par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$). Bien entendu dans ce cas Ω n'est pas fini. On parlera dans ce cas de **variable aléatoire discrète.** Mais dans ce cas, les sommes finies utilisées dans les définitions d'espérance, variance et écart-type doivent être remplacées par celle de séries numériques. Par exemple si

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$$

alors

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i, \quad V(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

2. Variables aléatoires continues

On suppose ici que l'espace probabilisé est donné par le triplet $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, Ω n'étant pas nécessairement fini et $\mathfrak{F}$ est une tribu de Ω.

2.1. **Définition.**

Définition 9. *Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur cet espace toute fonction*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

telle que $X(\Omega)$ soit un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise x est nulle :

$$P(X = x) = 0.$$

Nous verrons ceci un peu plus loin. Prenons par exemple comme variable aléatoire X taille d'un individu. On aura $P(X = 1,654321) = 0$.

La somme, le produit de variables aléatoires continues se définissent comme dans le cas fini :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Alors

$$X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

avec

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

et

$$XY : \Omega \to \mathbb{R}$$

avec

$$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

De même l'image d'une variable aléatoire X par une fonction (continue, dérivable, indéfiniment de fois dérivable) d'une variable réelle se définit par

$$Y = \varphi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

avec

$$Y(\omega) = \varphi(X)(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

2.2. **Loi de probabilité d'une variable aléatoire.**

Définition 10. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et soit* X *une variable aléatoire sur cet espace. La loi de probabilité de* X *est la probabilité sur* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$P_X(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}).$$

En particulier on a :

$$P_X(]a, b]) = P(\{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\})$$

ou bien

$$P_X(\{x\}) = P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}).$$

Remarquons que P_X est, comme dans le cas fini, une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Mais il n'est ainsi pas possible de définir la loi de X par la donnée des probabilités des événements élémentaires. En effet nous avons signalé que dans ce cas $P(X = x) = 0$. Dans le cas fini, il est clair que deux variables aléatoires sont égales si elles prennent les mêmes valeurs. Dans le cas continu, cette notion est un peu plus délicate.

Définition 11. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. *Elles sont égales presque partout si l'ensemble*

$$A = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

qui est dans $\mathfrak{F}$ *vérifie*

$$P(A) = 0.$$

Nous savons que cela ne signifie pas que A soit vide

Théorème 3. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. *Si elles sont égales presque partout, alors* $P_X = P_Y$.

La réciproque est fausse. Le fait que X et Y aient la même loi de probabilité ne signifie pas qu'elles soient égales ni même égale presque partout. Cette réciproque est déjà fausse dans le cas fini.

Exemple. On lance une pièce équilibrée et on considère le tirage pile ou face dont le résultat est 0 pour pile et 1 pour face. On effectue trois lancers. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois ou pile apparaît et soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où face apparaît. On a $\Omega = \{0, 1\}^3$ et $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Un résultat s'écrit $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1. Alors

$$P(\{\omega\}) = (\frac{1}{2})^3.$$

Soit k un entier inférieur ou égal à 3. Notons par A_k le sous ensemble de Ω défini par

$$A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\}.$$

Alors

$$P_X(\{k\}) = P(\{\omega, X(\omega) = k) = P(A_k) = C_3^k(\frac{1}{2})^3.$$

De même
$$P_Y(\{k\}) = C_3^k(\frac{1}{2})^3.$$
Les variables X et Y ont la même loi de probabilité.

2.3. **Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue, densité.** Soit X une variable aléatoire continue sur X La notion de fonction de répartition est indentique à celle donnée dans le cas fini (Définition 5) :

Définition 12. *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique*
$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
définie par
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut voir facilement que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(1) $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
(2) Pour tout x, $0 \leq F_X(x) \leq 1$
(3) F est une fonction croissante.

Proposition 2.
$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Démonstration. En effet, les évènements $\{X > x\}$ et $\{X \leq x\}$ sont disjoints et leur réunion est Ω. On en déduit
$$P(X > x) + P(X \leq x) = 1$$
d'où la proposition.

Application : Probabilité d'un évènement élémentaire Revenons à l'exemple précédent dans lequel on mentionnait que la probabilité d'un événement élémentaire pour une variable continue était nul. Ceci nécessite un peu d'explication. On dit qu'une fonction d'une variable réelle $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en un point x_0 si
$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$
Ceci n'est pas toujours vérifiée, du moins dans un cadre général, pour les fonctions de répartition. Elles vérifient néanmoins la propriété
$$\lim_{x \to x_0, x \geq x_0} F(x) = F(x_0).$$
On dit qu'elle sont continues à droite. Si tel est le cas, on a alors, en général
$$\lim_{x \to x_0, x \leq x_0} F(x) \neq F(x_0)$$
et on note
$$\lim_{x \to x_0, x \leq x_0} F(x) = F(x_0^-).$$

On a alors

$$P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-).$$

Par contre,

Proposition 3. *Supposons que la fonction de répartition $F_X(x)$ de X soit continue en tout point. Alors*

$$P(X = x) = 0.$$

On suppose maintenant que la fonction $F_X(x)$ est continue et dérivable.

Définition 13. *Supposons que la fonction de répartition $F_X(x)$ de X soit dérivable en tout point. On appelle fonction de densité de X la fonction dérivée de F_X :*

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Comme $F_X(x)$ est une fonction croissante, sa dérivée $f_X(x)$ est positive. Rappelons que si $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$, alors $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette intégrale représente l'aire de la partie du plan situé entre le segment $[a, b]$ de l'axe des abscisses et la courbe $f_X(x)$. On en déduit

Proposition 4.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour calculer en fonction de la densité les probabilités $P(X \leq x)$ nous avons besoin de la notion d'intégrale généralisée :

Définition 14. *Soit $f(x)$ une fonction continue. Alors*

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(t)dt.$

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt.$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(t)dt + \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(t)dt.$

Bien entendu, certaines de ces limites peuvent ne pas exister. Mais ceci est un autre problème que nous n'aborderons pas ici.

Proposition 5.
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

2.4. **Espérance, Ecart-type.** Soit X une variable aléatoire continue sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Définition 15. *L'espérance de la variable aléatoire X de densité f est*
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

Remarques.

(1) On suppose dans cete définition que l'intégrale généralisée existe.

(2) Quel est le lien entre cette définition pour les variables aléatoires continues et celle donnée pour variables aléatoires discrètes ? Das le cas d'une variable aléatoire discrète (ou finie), la fonction de répartition est discontinue. La notion de dérivabilité n'existe donc pas pour ces fonctions. On représente alors la fonction de densité avec des distributions de Dirac. Dans ce cadre la, la définition de l'espérance est basée sur l'intégration des distributions et elle conduit au même résultat.

Définition 16. *La variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X de densité f sont définis par*
$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Comme dans le cas fini, ces définitions se généralisent en introduisant les moments d'ordre k :
$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)dt.$$
Ainsi le moment d'ordre 0 vaut 1, le moment d'ordre 1 est l'espérance.

Définition 17. *On dit qu'une variable aléatoire est* **centrée** *si son espérance est nulle.*

A toute variable aléatoire X, on peut lui associée une variable aléatoire centrée. En effet si $m = E(X)$ alors $\widetilde{X} = X - m$ est centrée.

3. Quelques lois remarquables

3.1. **Les lois de Bernoulli et binomiales.** Nous avons au paragraphe **1.4** introduit ces lois comme des exemples fondamentaux de lois discrètes ou finies.

3.2. **La loi de Poisson.** Une variable aléatoire discrète X sur $\Omega = \mathbb{N}$ est dite de Poisson de paramètre λ si sa loi de probabilité est la loi de Poisson, c'est-à-dire

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Cette loi est utilisée pour décrire le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps donné. Elle s'applique également aux évènements rares, aux contrôles de qualité (on suppose que les erreurs sont rares). En physique, cette loi joue un rôle prépondérant en cinétique des gaz : on considère une enceinte de volume V contenant N particules identiques et sans interaction (N supposé grand). On se fixe un petit volume δV et on cherche la probabilité pour qu'une particule donnée se trouve dans ce volume. La loi est celle de Bernoulli. Mais pour N fixé, si on considère que δV devient très petit, alors cette loi est approximée par la loi de Poisson. Si X est un variable aléatoire de Poisson de paramètre λ alors

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda.$$

3.3. **Loi de Cauchy.** Cette loi est citée par curiosité car il est difficile de l'appliquer car elle n'a ni espérance, ni variance. Sa densité est de la forme

$$f(x) = \frac{a}{\pi a^2 + (x - x_0)^2}.$$

L'intégrale de cette fonction est divergente.

3.4. **La loi normale.** Cette loi est l'une des plus utilisé pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs vèments aléatoires. La loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(n, \sigma^2)$ est la loi de densité

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Son espérance est m et l'écart-type σ.

La loi normale centrée est la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi centrée réduite.

4. Fonction d'une variable aléatoire

4.1. **Changement de variable aléatoire.** Une variable aléatoire X étant donnée sur un espace probabilisé, il est parfois nécessaire de lui associer une seconde variable aléatoire Y (par exemple $Y = X^2$). Ceci s'appelle un changement de variable aléatoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilité et

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

une variable aléatoire sur cet espace. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction d'une variable réelle.

Définition 18. *Etant données une variable aléatoire X sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, on définit une autre variable aléatoire sur cet espace par*

$$Y = g(X)$$

c'est-à-dire définie par

$$Y(\omega) = g(X(\omega))$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer que Y est une variable aléatoire. Si X est une variable aléatoire finie, et si $x_1, \cdots, x_s$ sont les valeurs de X, alors Y est aussi une variable aléatoire finie prenant comme valeurs $g(x_1), \cdots, g(x_s)$. Dans le cadre continu, cela n'est pas si simple. On va s'y intéresser dans le paragraphe suivant.

4.2. **Cas où X est continue.** Rappelons que si X est une variable aléatoire continue sur Ω, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$

(condition toujours réalisée dans le cadre fini). Ainsi $g(X)$ est une variable aléatoire continue si

$$g(X)^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, g(X(\omega)) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Evidemment cette condition ne peut être réalisée pour des fonctions g quelconques. Soit

$$A_g(y) = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq y\}.$$

Il est clair que

$$g(X(\omega)) \leq y$$

si et seulement si

$$X(\omega) \in A_g(y).$$

Nous supposerons donc qu'au moins g vérifie les propriétés suivantes :

(1) L'ensemble $A_g(y)$ doit être une réunion ou intersection d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles.
(2) Les évènements $\{g(X) = \pm\infty\}$ soient négligeables.

Pour être sûrs que ces conditions soient réalisées, nous supposerons que g est continue et même dérivable. Dans ce cas Y est bien une variable aléatoire continue, sa loi est donnée par

$$P_Y(]-\infty, y]) = P(\{\omega \in \Omega,\ Y(\omega) \leq y\} = P(\{\omega \in \Omega,\ g(X)(\omega) \leq y\}$$

et la fonction de répartition

$$F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

Exemples.

1. Supposons que la fonction g soit bornée, c'est-à-dire, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que

$$a \leq g(x) \leq b.$$

Dans ce cas, on aura

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq b, \\ 0 & \text{si } y < a. \end{cases}$$

Prenons par exemple une fonction dont le graphe est donné dans la Figure 1.

Dans cet exemple, $g(x) \leq y_1$ si et seulement si $x \leq x_1$. Ainsi
$$F_Y(y_1) = P(Y \leq y_1) = P(X \leq x_1) = F_X(x_1).$$
Par contre $g(x) \leq y_2$ si et seulement si $x \in [x_3, x_4] \bigcup]-\infty, x_2]$. On a donc
$$F_Y(y_2) = P(x_3 \leq X \leq x_4) + P(X \leq x_2) = F_X(x_2) + F_X(x_4) - F_X(x_3).$$

2. $g(x) = 2x - 2$ (voir Figure 2).
$$F_Y(y) = P(Y \leq 2x - 2) = P(X \leq \frac{y+2}{2})$$
et donc
$$F_Y(y) = F_X(\frac{y+2}{2}).$$

3. $g(x) = x^2$ (voir Figure 3). Il est clair que si $y < 0$ alors $F_Y(y) = 0$. Par contre, si $y \geq 0$, alors
$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

4.3. **Densité de probabilité, espérance de $Y = g(X)$.** Nous allons supposer dans un premier temps que g est bijective. Ceci signifie qu'à un élément $x \in \mathbb{R}$ est associé un élément $y = g(x)$. On suppose de plus que g est dérivable et que la dérivée ne s'annule pas. On a alors, si g est croissante ($g' > 0$)
$$F_Y(y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X \circ g^{-1}(y)$$
et si g est décroissante
$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X \circ g^{-1}(y).$$
La densité de la fonction Y est donc
$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \pm(F_X \circ g^{-1}(y))' = \pm\frac{f_X(x)}{g'(x)}.$$

Supposons à présent que g ne soit pas bijective. Alors pour y donné, l'équation $g(x) = y$ a plusieurs solutions et l'on a :

Proposition 6. *Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ les racines de $y = g(x)$, y donné, c'est-à-dire*
$$y = g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_n) = \cdots$$
Alors
$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \cdots$$

Exemple. Prenons $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. L'équation $y = ax + b$ n'a qu'une seule solution $x = \frac{y-b}{a}$. Comme $g'(x) = a$, on a
$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a}).$$

Nous savons que l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy.$$

Soit $Y = g(X)$ et supposons que que $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$. Alors

$$y f_Y(y) = g(x_1) f_X(x_1) + g(x_2) f_X(x_2).$$

On en déduit

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Ceci est encore vrai dans le cas général

Proposition 7. *Soit $Y = g(X)$ où g est dérivable et la dérivée ne s'annule pas. Alors l'espérance de Y est*

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

4.4. **Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.** Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé. L'exponentielle complexe de X est la variable aléatoire

$$Y = exp(iX) = e^{iX}.$$

Rappelons que l'exponentienne complexe est la fonction d'une variable réelle à valeurs complexes :

$$exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Ainsi

$$Y = \cos X + i \sin X.$$

Définition 19. *Soit X une variable aléatoire. Sa fonction caractéristiqe est l'espérance de l'exponentielle complexe de X :*

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin itX).$$

La fonction caratéristique d'une variable aléatoire joue un rôle primordial car elle caractérise entièrement la loi de probabilité de cette variable.

Ainsi, dans le cas d'une variable aléatoire à densité, la fonction caractéristique est la transformée de Fourier inverse (à un facteur 2π près dans l'exponentielle suivant la convention) de la densité. En effet si f_X est la densité de X, alors l'espérance de X de densité f est d'après la proposition ci-dessus

$$E(e^{iX}) = ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f_X(x) dx.$$

On en déduit

$$\varphi_X(t) = ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

C'est bien, à un facteur près la transformée de Fourier de f. Rappelons que si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{F}(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x) dx.$$

EXERCICES

Exercice 1. *On parie sur un nombre compris entre* 1 *et* 6. *On lance* 3*dés.*

- *On gagne* 3 *euros si ce numéro sort* 3 *fois.*
- *On gagne* 2 *euros si ce numéro sort* 2 *fois.*
- *On gagne* 1 *euro si ce numéro sort* 1 *fois.*
- *On perd* 1 *euro si ce numéro ne sort pas.*

Soit X *la variable aléatoire représentant le gain. Déterminer l'univers* Ω*, l'espace fondamental de la variable* X. *On note* a *le nombre sur lequel on parie. Déterminer* $X^{-1}(3)$ *et* $X^{-1}(2)$. *Ecrire la loi de* X.

Exercice 2. *On lance une paire de dés et on note* X *la variable aléatoire correspondant à la somme des nombres sortis. Déterminer l'univers* Ω*, l'espace fondamental de la variable* X. *Soit* A_i *l'évèment correspondant à* $X = i$. *Déterminer la probabilité de* $A(i)$. *En déduire la loi de* X.

Exercice 3. *On considère le lancer d'un dé.*

(1) *Décrire l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
(2) *On considère l'application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *définie par* $X(\omega) = 1$ *si* ω *est impair, sinon* $X(\omega) = 0$. *Montrer que* X *est une variable aléatoire.*
(3) *Quelle est sa fonction de répartition.*

Exercice 4. *Une urne contient quatre boules numérotées de* 1 *à* 4. *On en tire deux sans remise.*

(1) *On note par* X *le plus grand des deux nombres obtenus. Quelle est la loi de probabilité de* X *?*
(2) *On note par* Y *le plus petit des deux nombres obtenus. Quelle est la loi de probabilité de* Y *?*

Exercice 5. *On lance un dé cinq fois. Quelle est la probabilité pour que le* 6 *sorte 2 fois.*

Exercice 6. *On lance des fusées vers Mars. La probabillité de réussite à chaque lancer est* $0,7$. *On effectue* 10 *lancers successifs.*

(1) *Quelle est la probabilité de n'avoir aucun lancer réussi ?*
(2) *Combien de lancers faut-il faire pour avoir* 98% *de chance pour qu'au moins un lancer réussisse.*

CORRECTIONS des EXERCICES

Exercice 1. Comme on lance 3 dés, l'univers Ω est constitué des triples (n, m, p) avec $1 \leq n, m, p \leq 6$. Ainsi Ω contient $6^3 = 216$ éléments. On a

$$\Omega_X = \{-1, 1, 2, 3\}.$$

Si a désigne le nombre sur lequel on parie ($a \in [[1, 2, \cdots, 6]]$), alors

$$X^{-1}(3) = \{aaa\}$$

et son cardinal est 1.

De même

$$X^{-1}(2) = \{aab, aba, baa, \ b \neq a\}$$

et le cardinal de $X^{-1}(2)$ est $3 \times 5 = 15$.

On a aussi

$$X^{-1}(1) = \{abc, bac, bca, \ b, c \neq a\}$$

qui est de cardinal $3 \times 5^2 = 75$ et

$$X^{-1}(-1) = \{bcd, \ b, c, d \neq a\}$$

de cardinalité $5^3 = 125$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

$$P(X = -1) = \frac{125}{216}, \ P(X = 1) = \frac{75}{216}, P(X = 2) = \frac{15}{216}, P(X = 3) = \frac{1}{216}.$$

Exercice 2. L'espace fondamental est

$$\Omega = \{(i, j), \ 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

Il contient donc $6^2 = 36$ éléments. Si X est la variable aléatoire correspondant à la somme des nombres sortis, alors

$$\Omega_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

On aura par exemple

$$A_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

de cardinalité 6. Plus généralement

$$A_i = \{(j, k), j + k = i\}, \ i = 7, \cdots 12$$

soit

$$\begin{array}{l}
A_2 = \{(1, 1)\}, \\
A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}, \\
A_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \\
\cdots \\
A_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}, \\
A_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}, \\
A_{10} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}, \\
A_{11} = \{(5, 6), (6, 5)\}, \\
A_{12} = \{(6, 6)\},
\end{array}$$

Ainsi

$$P(X=2)=\frac{1}{36}, P(X=3)=\frac{2}{36},\cdots, P(X=7)=\frac{6}{36}, P(X=8)=\frac{5}{36},\cdots, P(X=12)=\frac{1}{36}.$$

Exercice 3. On a ici

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

et $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$. Comme Ω est fini, toute application

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$

est une variable aléatoire. La loi de X est donnée par

$$P(X=i)=\frac{1}{6}$$

(on suppose le dé équilibré. La fonction de répartition de X est la fonction

$$F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

définie par

$$F(x)=P(X\leq x).$$

Ainsi
- Si $x<1$, $F(x)=0$.
- Si $1\leq x<2$, $F(x)=1/6$.
- Si $2\leq x<3$, $F(x)=2/6$.
- Si $3\leq x<4$, $F(x)=3/6$.
- Si $4\leq x<5$, $F(x)=4/6$.
- Si $5\leq x<6$, $F(x)=5/6$.
- Si $6\leq x$, $F(x)=1$.

Exercice 4. 1. La variable X est à valeurs dans $\{1,2,3,4\}$. L'univers Ω contient 16 éléments. On a
- $X^{-1}(1)=\{(1,1)\}$ et $P(X=1)=1/16$,
- $X^{-1}(2)=\{(1,2),(2,2),(2,1)\}$ et $P(X=2)=3/16$,
- $X^{-1}(3)=\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}$ et $P(X=3)=5/16$,
- $X^{-1}(4)=\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ et $P(X=4)=7/16$,

2. De même Y prend ses valeurs dans $\{1,2,3,3\}$ et on aura
- $Y^{-1}(1)=\{(1,1),(1,2),(3,1),(4,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$ et $P(Y=1)=7/16$,
- $Y^{-1}(2)=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$ et $P(Y=2)=5/16$,
- $Y^{-1}(3)=\{(3,3),(4,3),(3,4),\}$ et $P(Y=3)=3/16$,
- $Y^{-1}(4)=\{(4,4)\}$ et $P(XY=4)=1/16$.

Exercice 5. Soit X la variable aléatoire correspondant au chiffre qui sort. Alors

$$P(X=6)=\frac{1}{6}.$$

On considère un schéma binomial. Si $p_n(k)$ est la probabilité d'avoir k succés (le 6 sort k fois) pour n lancers, on a

$$p_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ici $k = 2$ et $n = 5$. Ainsi

$$p_5(2) = \binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = \frac{5!}{2!3!}\frac{1}{36}\frac{75}{216} = \frac{375}{18 \times 216}$$

et

$$p_5(2) \simeq 0,16.$$

Exercice 6. 1. La variable aléatoire correspondant aux lancers réussis suit la loi binomiale

$$P(X = k) = \binom{10}{k}(0,7)^k(0,3)^{10-k}.$$

Pour une telle loi, son espérance est

$$E(X) = (10) \times 0,7 = 7.$$

Pour n'avoir aucun lancer réussi, on considère $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} = (0,7)^0(0,3)^{10} = (0,3^{10} \simeq 0,610^{-6}.$$

2. Si l'on fait n lancers, alors

$$P(X = k) = \binom{n}{k}(0,7)^k(0,3)^{n-k}.$$

Si $k = 0$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0}(0,7)^0(0,3)^n = (0,3)^n.$$

Or $(0,3)^n \leq 0,02$ implique $n \geq 4$. Il faut au moins 4 lancers pour avoir 98% de chance pour qu'au moins un lancer réussisse.