CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique. RCP 103

Mathématiques : Modélisation markovienne

Cours Elisabeth Remm

Chapitre 3

Vecteurs aléatoires

Table des matières

1. Couple de variables aléatoires 2
1.1. Définition : Fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires 2
1.2. Propriétés 2
1.3. La loi de probabilité du couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ou loi conjointe 2
1.4. Lois marginales 3
1.5. Cas d'un couple de variables aléatoires finies 3
1.6. Couple de variables aléatoires continues 5
1.7. Variables aléatoires indépendantes 6
1.8. Indépendance et corrélation 7
2. cas général : vecteurs aléatoires 7
2.1. Fonction de répartition, densité conjointe 7
2.2. Changement de variables 8
2.3. Matrice de covariance 9

Le but de ce chapitre est de présenter une étude simultanée de variables aléatoires. Le cas le plus simple est celui d'un couple de variables aléatoires que l'on va considérer comme une variable aléatoire mais à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, on n'étudie pas simplement chacune des deux variables, mais on présente une étude globale, analogue à celle que l'on fait en analyse avec des fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1. Couple de variables aléatoires

1.1. **Définition : Fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires.** On s'intéresse dans ce paragraphe au vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ de dimension 2, appelé communément couple de variables aléatoires. Ainsi

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

est une fonction à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Définition 1. *La fonction de répartition du vecteur $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ la fonction de deux variables x_1, x_2 donnée par*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, \text{ et } X_2 \leq x_2\}.$$

Exemple. On dispose d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au sort successivement deux jetons sans remise. On note (X, Y) les résultats des deux tirages. Considérons le couple (X, Y). Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(i, j) = P(X = i, Y = j), \quad i, j = 1, \cdots, 4.$$

On a

$$\begin{cases} P(X = i, Y = i) = 0 & i = 1, \cdots, 4 \\ P(X = i, Y = j) = 1/12 & 1 \leq i, j \leq 4, \ i \neq j. \end{cases}$$

On en déduit la fonction de répartition de ce couple. On peut présenter ces valeurs dans un tableau :

X/Y	1	2	3	4
1	0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	0	1/12	1/12
3	1/12	1/12	0	1/12
4	1/12	1/12	1/12	0

1.2. **Propriétés.** La fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ vérifie

(1) $F_{\mathbf{X}}(-\infty, x_2) = F_{\mathbf{X}}(x_1, -\infty) = 0$,

(2) $F_{\mathbf{X}}(+\infty, +\infty) = 1$.

Cette fonction est également croissante en chacune de ses variables.

1.3. **La loi de probabilité du couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ou loi conjointe.** Rappelons que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est la probabilité

$$P_X(]a, b]) = P\{a < X \leq b\} = P(\{\omega \in \Omega, \ a < X(\omega) \leq b\}).$$

Considérons à présent le couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. L'évènement $\{a_1 < X_1 \leq b_1, X_2 \leq x_2\}$ est formé des points (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tels que $a_1 < X_1 \leq b_1$ et $X_2 \leq x_2$. On en déduit

$$P(\{a_1 < X_1 \leq b_1, \ X_2 \leq x_2\} = F(b_1, x_2) - F(a_1, x_2).$$

De même, on aura

$$P(\{X_1 \leq x_1, \ a_2 < X_2 \leq b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2).$$

Définition 2. *La loi de probabilité du couple* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *de variable aléatoires sur* Ω *est donnée pour tout rectangle* $R =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$ *du plan* $\mathbb{R}^2$ *par*
$$P_{\mathbf{X}} = P(\{a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\}).$$

On a donc
$$P_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(a_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(b_1, a_2) + F_{\mathbf{X}}(a_1, a_2).$$
C'est donc la probabilité pour que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ soit dans le rectangle R.

1.4. **Lois marginales.** Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de variable aléatoires sur Ω.

Définition 3. *On appelle loi marginale de* X_i *du couple* $\boldsymbol{X}$ *la loi suivie par la seule variable* X_i *et donc leur fonction de répartition.*

Connaissant la fonction de répartition de $\mathbf{X}$, il est facile de trouver la loi marginale de chacune des variables X_i. On aura par exemple
$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty)$$
et
$$F_{X_2}(x_2) = F(+\infty, x_2).$$

1.5. **Cas d'un couple de variables aléatoires finies.** Supposons que $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ soit fini. Dans ce cas, la loi sera représentée par un tableau à double entrée. Les lignes correspondent aux valeurs $P(X_1(\omega_i))$ et les colonnes aux valeurs $P(X_2(\omega_i))$. On notera $p_{ij} = P(X_1 = \omega_I, X_2 = \omega_j)$. Le tableau se présentera ainsi

$X_2(\omega_j)/X_1(\omega_i)$	$X_1(\omega_1)$	$X_1(\omega_2)$	$\cdots$	$X_1(\omega_n)$
$X_2(\omega_1)$	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}
$X_2(\omega_2)$	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$X_2(\omega_n)$	p_{1n}	p_{2n}	$\cdots$	p_{nn}

Exemple. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules de l'urne. Soit X_1 la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, à 0 sinon. Soit X_2 la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, à 0 sinon. Déterminons la loi conjointe du couple (X_1, X_2). On suppose que les tirages se font sans remise. Le tableau est ainsi :

$X_2(\omega_j)/X_1(\omega_i)$	0	1
0	2/7	2/7
1	2/7	1/7

La définition des lois marginales dans le cas fini se ramène à la définition suivante.

Notons par $x_{1,i}$ les valeurs de X_1, soit $x_{1,i} = X_1(\omega_I)$ et par $x_{2,i}$ celle s de X_2.

Définition 4. *Soit* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *un couple de variable aléatoires sur* Ω *de loi* $P_{\boldsymbol{X}}$. *Alors les applications*

$$P_{X_1}(x_{1,i}) = P\{X_1 = x_{1,i}\} = p_{i,\bullet}$$

et

$$P_{X_2}(x_{2,j}) = P\{X_2 = x_{2,j}\} = p_{\bullet,j}$$

sont appelées les lois marginales du couple $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$. *Ce sont les lois de probabilité de chacune des variables* X_1 *et* X_2.

Il est clair que l'on a

$$p_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad p_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

et

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

Dans l'exemple précédent, on peut compléter le tableau en inscrivant les lois marginales. On obtient

$X_2(\omega_j)/X_1(\omega_i)$	0	1	P_{X_1}
0	2/7	2/7	4/7
1	2/7	1/7	3/7
P_{X_2}	4/7	3/7	1

Notons enfin que la seule connaissance des lois marginales ne suffit pas pour déterminer la loi du couple.

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de variable aléatoires sur (Ω, P).

Définition 5. *Pout tout* $x_2 \in X_2(\Omega)$ *tel que* $P(X_2 = x_2) \neq 0$, *la loi de* $P_{X_2=x_2}$ *de* X_1 *sachant* $\{X_2 = x_2\}$ *est donnée par*

$$P_{X_2=x_2}(X_1 = x_1) = P(X_1 = x_1, x_2 = x_2) = \frac{P_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)}{P(X_2 = x_2)}.$$

De même, pout tout $x_1 \in X_1(\Omega)$ *tel que* $P(X_1 = x_1) \neq 0$, *la loi de* $P_{X_1=x_1}$ *de* X_2 *sachant* $\{X_1 = x_1\}$ *est donnée par*

$$P_{X_1=x_1}(X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1, x_2 = x_2) = \frac{P_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2)}{P(X_1 = x_1)}.$$

Chacune de ces applications , $P_{X_2=x_2}$ et $P_{X_1=x_1}$ sont des probabilités sur Ω. Déterminons ces lois dans l'exemple précédent :

$X_1(\omega_i)$	0	1
$P_{X_2=0}$	1/2	1/2
$P_{X_2=1}$	2/3	1/3

,

$X_2(\omega_i)$	0	1
$P_{X_1=0}$	1/2	1/2
$P_{X_1=1}$	2/3	1/3

1.6. **Couple de variables aléatoires continues.** On généralise la notion de densité de probabilité ainsi :

Définition 6. *On appelle densité de probabilité conjointe du couple $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ la fonction*
$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2).$$

Evidemment on suppose que la fonction de répartition admet ces dérivées partielles. Rappelons brièvement ces notions. Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de deux variables. Soit x_2 fixé et considérons la fonction g_1 d'une variable réelle définie par
$$g_1(x_1) = f(x_1, x_2).$$
Dans cette définition la variable est x_1 et x_2 est considéré comme un paramètre. Supposons g_1 dérivable. Alors la dérivée de g_1 est la dérivée partielle de f par rapport à x_1. Elle est notée :
$$g_1'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2).$$
De même, si x_1 est fixé, on considère la fonction d'une variable
$$g_2(x_2) = f(x_1, x_2).$$
Dans cette définition la variable est x_2 et x_1 est considéré comme un paramètre. Supposons g_2 dérivable. Alors la dérivée de g_2 est la dérivée partielle de f par rapport à x_2. Elle est notée :
$$g_2'(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2).$$
Prenons par exemple $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^3$. Alors
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 12x_2^2.$$
Considérons maintenant la fonction de deux variables $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$. Elle admet deux dérivées partielles, l'une par rapport à x_1 l'autre par rapport à x_2. On les notes

(1) $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2),$

(2) $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2)$

De même, en considérant la fonction de deux variables $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$, elle admet deux dérivées partielles, l'une par rapport à x_1 l'autre par rapport à x_2. On les notes

(1) $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2)$

(2) $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2),$

On notera qu'en général

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2).$$

Dans l'exemple précédent, on a donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) = 2, \ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) = 3, \ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2) = 24x_2.$$

1.7. **Variables aléatoires indépendantes.** Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires.

Définition 7. *On dit que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si la fonction de répartition du couple vérifie*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Lorsque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont finies, elles sont indépendantes si et seulement si

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2).$$

Dans ce cas, la donnée des lois marginales permet de trouver la loi conjointe, ce qui en général faux si les variables ne sont pas indépendantes.

Si elles sont continues de densité respectives f_{X_1} et f_{X_2} alors l'indépendance se traduit par

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

Exemple Deux personnes se donnent un rendez-vous. L'heure d'arrivée de ces deux personnes est une variable aléatoire uniforme répartie sur l'intervalle $(20h, 21h)$. Ces deux variables sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour que la première personne arrivée attende plus de 10 minutes ?

Désignons par X et Y les deux variables correspondant aux dates d'arrivée en minutes de chacun des individus. Il s'agit de deux variables indépendantes de loi uniforme entre 0 et 60. On peut supposer ces variables continues de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{60}, \ f_Y(y) = \frac{1}{60}.$$

Comme ces variables sont indépendantes

$$P(X < Y + 10) + P(Y < X + 10) = 2P(X + 10 < Y).$$

On en déduit

$$2P(X + 10 < Y) = 2 \int\int_{x+10<y} f_{\mathbf{X}}(x, y) dx dy = 2 \int_{10}^{60} \int_0^{y-10} (\frac{1}{60})^2 dx dy = \frac{25}{36}.$$

1.8. **Indépendance et corrélation.** Dans les chapitres précédents, nous avons introduit la notion de corrélation entre deux variables aléatoires. Rappelons les principales notions.

(1) Si X_1 et X_2 sont finies d'espérance $E(X_1)$ et $E(X_2)$, alors la covariance de X_1 et X_2 est le réel
$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$
sachant que $E(X_1X_2) = \sum x_{1,i}x_{2,j}p_{ij}$.

(2) Si X_1 et X_2 sont continues d'espérance $E(X_1)$ et $E(X_2)$, alors la covariance de X_1 et X_2 est le réel
$$\int\int_{\mathbb{R}^2}(x_1 - E(X_1))(x_2 - E(X_2))f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$

(3) Le coefficient de corrélation du couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est le réel
$$r(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$
où $Var(X)$ est la variance de X.

Proposition 1. *Si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, alors elles sont décorrélées, c'est-à-dire vérifient*
$$r(X_1, X_2) = 0.$$

La réciproque est fausse en général.

2. Cas général : vecteurs aléatoires

2.1. **Fonction de répartition, densité conjointe.** Nous avons défini les vecteurs aléatoires à n dimensions comme un n-uplet de variables aléatoires :
$$\mathbb{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
sur un même espace probabilisé Ω. Sa fonction de répartition est donnée par
$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \cdots, x_n) = P(X_i \leq x_i,\ i = 1, \cdots, n).$$
Elle vérifie

(1) $F_{\mathbb{X}}(-\infty, x_2, \cdots, x_n) = \cdots = F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_n) = F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \cdots, -\infty) = 0.$

(2) $F_{\mathbb{X}}(+\infty, \cdots, +\infty) = 1.$

(3) $F_{\mathbb{X}}$ est croissante en chacune de ses variables.

Si chacune des variables est continue, la densité du vecteur X sera donnée par
$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}.$$

2.2. **Changement de variables.** Considérons n fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

On suppose que ces fonctions admettent des dérivées partielles aux ordres souhaités et qu'elles sont bijectives ce qui signifie que l'e système $g_k(x_1, \cdots, x_n) = y_k,\ k = 1, \cdots, n$ admet une solution. On considère un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ de densité $f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_n)$. On souhaite trouver la densité du nouveau vecteur

$$\mathbf{Y} = (g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)).$$

Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et notons par

$$J_{g_1, \cdots, g_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

son déterminant. Alors la fonction densité du vecteur $\mathbf{Y}$ est donnée par

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_n) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_n)}{|J_{g_1, \cdots, g_n}(x_1, \cdots, x_n)|}. \tag{1}$$

Exemple. Considérons un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ et le changement de variables

$$Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = X_1 - X_2.$$

On a donc

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\ g_2(x_1 + x_2) = x_1 - x_2.$$

Ces deux fonctions sont bijectives, les équations $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 - x_2$ ont pour solution

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

La fonction

$$J_{g_1,,g_2}(x_1, x_2)$$

est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$J_{g_1,,g_2}(x_1, x_2) = -2.$$

On en déduit, si $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$:

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)}{|J_{g_1, g_2}(x_1, x_2)|} = \frac{1}{2} f_{\mathbf{X}}(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}).$$

Remarque : cas où le changement n'est pas bijectif. Nous avons supposé ci-dessus que le système d'équations $y_i = g_i(x_1, \cdots, x_n),\ i = 1, \cdots, n$ avait une et une seule solution. Supposons qu'il admette un nombre fini de solutions $(x_1^p, \cdots, x_n^p)$ pour $p = 1, \cdots, s$ (précédemment on avait $s = 1$). Dans ce cas on aura

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \cdots, y_n) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1^1, \cdots, x_n^1)}{|J_{g_1,\cdots,g_n}(x_1^1, \cdots, x_n^1)|} + \cdots + \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1^s, \cdots, x_n^s)}{|J_{g_1,\cdots,g_n}(x_1^s, \cdots, x_n^s)|}. \tag{2}$$

2.3. **Matrice de covariance.** Soit $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire. Pour chacun des couples (X_i, X_j), $i, j = 1, \cdots, n$, notons par

$$C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

la covariance des deux variables X_i et X_j.

Définition 8. *Les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont mutuellement non-corrélées si $C_{ij} = 0$ pour tout $i, j = 1, \cdots, n$ et $i \neq j.i$*

Par exemple, si les variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes, elles sont non-corrélées, l'inverse n'étant pas en général vrai.

EXERCICES

Exercice 1. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules de l'urne. Soit X_1 la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, à 0 sinon. Soit X_2 la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, à 0 sinon. On suppose que les tirages se font avec remise.

(1) Faire le tableau de la loi conjointe et déterminer les lois marginales.
(2) En comparant avec le tirage sans remise, en déduire que l'on peut avoir les mêmes lois marginales mais les lois conjointes différentes.
(3) Déterminer les lois conditionnelles.

Exercice 2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires. Supposons X_1 et X_2 indépendantes. Montrer que la donnée des lois marginales permet de retrouver la loi conjointe.

Exercice 3. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires. Supposons X_1 et X_2 soient des variables de Bernoulli. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si les évènements $\{X_1 = 1\}$ et $\{X_2 = 1\}$ sont indépendants.

Exercice 4. Une urne contient r boules dont r_1 sont blanches et r_2 sont noires. On effectue n tirages successifs en replaçant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. A l'issue des n tirages, on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois de X et Y .

Exercice 5. La loi trinomiale est une extension de la loi binomiale. Imaginons en effet une expérience qui a trois issues possibles, notée x, y et z, avec comme probabilité de réalisation $p_x, p_y, p_z = 1 - p_x - p_y$. Répétons n fois cette expérience (n est fixé) de façon indépendante et comptons le nombre d'apparitions de x (nombre noté X) et de y (noté Y) parmi ces n répétitions. Le couple (X, Y) suit alors une loi trinomiale de paramètres (n, p_x, p_y) donnée pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, tels que $i + j \leq n$ par :

$$P(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_x^i p_y^j (1 - p_x - p_y)^{n-i-j}.$$

Sinon $P(X = i, Y = j) = 0$. Montrer que l'on a bien une loi de probabilité du couple (X,Y).