CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique RCP103

Mathématiques : Modélisation markovienne

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 4

Chaines de Markov en temps discret

Table des matières

1. Introduction

On veut repérer l'évolution d'un phénomène qui évolue dans le temps par une variable aléatoire X_t, cette variable servant à décrire l'état du système à l'instant t. Nous allons supposer que le temps est discrétisé (prenons comme exemple l'évolution du gain d'un joueur qui joue toutes les minutes). On aura donc une suite de variables aléatoires

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$

Exemples.

(1) On tire au hasard toutes les secondes un nombre compris entre 0 et 9. Dans ce cas X_n désigne le tirage à la seconde n et X_n prend ses valeurs dans $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Les variables X_n sont indépendantes. Elles suivent la loi uniforme sur $\{0, 1, \cdots, 9\}$ et

$$P(X_n = i) = \frac{1}{10}$$

pour $i = 0, 1, \cdots, 9$.

(2) On considère un alphabet réduit à $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. On constitue un mot en tirant au hasard une lettre dans $\mathcal{A}$. On note par X_n la variable aléatoire qui à un mot fait correspondre 0 si la n-ième lettre n'est pas a, et fait correspondre k si la n-ième lettre est a et si elle est la k-ième occurrentce d'une suite successive de a dans le mot. On pose $X_0 = 0$. Prenons par exemple le mot

$$aabacaaabc.$$

Alors

$$\begin{cases} X_1 = 1, \ X_2 = 2, \\ X_3 = 0, \ X_4 = 1, \\ X_5 = 0, \ X_6 = 1, \\ X_7 = 2, \ X_8 = 3, \\ X_9 = 0, \ X_{10} = 0. \end{cases}$$

On remarque que X_2 dépend de X_1, que X_1 dépend de X_0, que X_8 dépend de X_7 mais pas de $X_6, X_5; X_4, \cdots, X_0$. De manière générale, cette dépendance s'écrit :

— si $X_n = 0$, alors $X_{n+1} = 0$ ou 1,

— si $X_n = k$, alors $X_{n+1} = k + 1$ ou 0

On voit sur cet exemple que les variables X_n ne sont pas indépendantes mais que X_n ne dépend que de X_{n-1}.

(3) Un joueur à la roulette a la stratégie suivante : il possède 15 euros et veut gagner 1 euro. Il mise 1 euro sur le rouge (rappelons qu'à la roulette, il y a deux couleurs, le rouge et le noir). S'il gagne, il s'arrête. Sinon, il continue à jouer sur le rouge en doublant sa mise à chaque fois. On a, si X_n désigne le gain à l'instant n :

— $X_0 = 15$

— $X_1 = \begin{cases} 14 \text{ s'il perd} \\ 16 \text{ s'il gagne } \ STOP \end{cases}$

— $X_2 = \begin{cases} 12 \text{ si } X_1 = 14 \text{ et s'il perd} \\ 16 \text{ si } X_1 = 14 \text{ et s'il gagne } \ STOP \end{cases}$

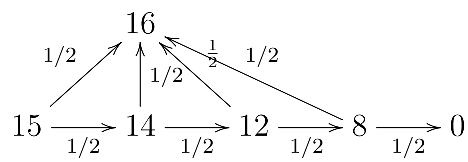
— $X_3 = \begin{cases} 8 \text{ si } X_2 = 12 \text{ et s'il perd} \\ 16 \text{ si } X_2 = 12 \text{ et s'il gagne } \ STOP \end{cases}$

— $X_4 = \begin{cases} 0 \text{ si } X_3 = 8 \text{ et s'il perd} \\ 16 \text{ si } X_3 = 8 \text{ et s'il gagne } \ STOP \end{cases}$

On voit ainsi que X_n ne dépend que de X_{n-1}. Notons que la probabilité de gagner, c'est-à-dire d'atteindre 16 euros est de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

On gagne donc 1 euro avec une probabilité de 15/16 et on pert 15 euros avec une probabilité de 1/16. On peut représenter cette chaîne par le graphe suivant :



2. Chaînes de Markov

2.1. Définition.

Définition 1. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires sur un même espace probabilité et à valeurs dans un même ensemble E identifié soit à $\{1, \cdots, N\}$ s'il est fini, soit à $\mathbb{N} - \{0\}$ s'il est infini. On dit que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\{i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\} \in E^{n+2}$ tel que*

$$P(X_n = i_n,\ X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1,\ X_0 = i_0) > 0$$

alors

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

ne dépend que des valeurs n, i_n et i_{n+1}.

Les états successifs d'un système peuvent être décrits par une chaîne de Markov si la connaissance de l'état du système à l'instant présent apporte autant d'informations sur le futur que la connaissance de tout le passé. Les chaînes de Markov sont des processus sans mémoire.

Une autre façon de dire que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov est que si $\{i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\} \in E$ tel que

$$P(X_n = i_n,\ X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1,\ X_0 = i_0) > 0$$

alors

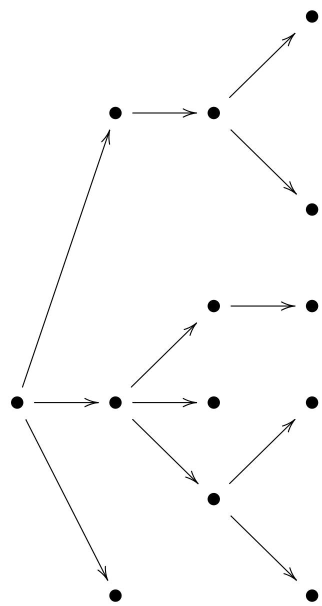
$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

2.2. Autres exemples caractéristiques des chaînes de Markov.

2.2.1. *L'arbre de Galton-Watson.* On considère la variable aléatoire $X_{m,n}$ indexée par 2 indices entiers représentant le nombre de fils de l'individu numéroté m à la n-ième génération. Le nombre d'individus à la génération n est

$$Z_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,Z_{n-1}}.$$

La suite de variable aléatoire $\{Z_n\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est une chaîne de Markov. Notons $X_{0,1}$ le premier individu. Considérons par exemple le graphe suivant :



Il correspond à
- $X_{0,1} = 3$,
- $X_{1,1} = 1,\ X_{1,2} = 3,\ X_{1,3} = 0$ soit $Z_2 = 4$.
- $X_{2,1} = 2,\ X_{2,2} = 1,\ X_{2,3} = 0,\ X_{2,4} = 2$ soit $Z_3 = 5$.

Cet arbre est appelé l''arbre de Galton-Watson. Le nombre d'individus dans la génération à venir ne dépend que du nombre d'individus dans la génération actuelle.

2.2.2. *Problème des files d'attente.* On considère la salle de réservation des billets de la gare de Mulhouse. Elle comprend un certain nombre de guichets. Les clients sont, soit en train d'être servis à un guichet, soit dans la file d'attente. On note X_t le nombre de clients présents à l'instant t. Ici on a un processus du type chaîne de Markov mais en temps continu.

On notera

$$Q_n(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1}$$

3. Chaînes de Markov homogènes

3.1. **Définition.**

Définition 2. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov. Elle est dite homogène si la probabilité conditionnelle $Q_n(i,j)$ ne dépend pas de n :*

$$Q_n(i,j) = Q(i,j)$$

pour tout n

Dans ce cas $Q(i,j)$, que l'on notera pour simplifier q_{ij}, est appelée la probabilité de transition de i vers j. Comme nous avons supposé que les variables aléatoires prenaient leurs valeurs dans $E = \{1, \cdots, n\}$, les éléments q_{ij} sont indexés par $\{1, \cdots, n\}$. Nous pouvons les ranger sous forme de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{pmatrix}$$

avec $q_{ij} = Q(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Notons que le premier indice i de q_{ij} est celui correspondant au numéro de la ligne de la matrice Q comportant q_{ij} et le deuxième indice j celui de la colonne.

Définition 3. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène. Les valeurs q_{ij} sont appelées les probabilités de transition de i vers j et la matrice Q la matrice de transition*

Bien entendu, la matrice Q n'existe que si E est fini.

Exemples.

(1) Reprenons l'exemple du joueur à la roulette (paragraphe 1). On ici $E = \{0, 1, \cdots, 16\}$. Alors

$$Q_0(15, 14) = 1/2, Q_1(15, 14) = 0$$

et cette chaîne n'est pas homogène.

(2) Reprenons l'exemple de l'alphabet réduit à $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. On a $E = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$ si on suppose n'être intéressé que par des mots de 10 lettres.. Alors, si nous considérons les matrices Q_k dont les coefficients sont $Q_k(i,j)$, alors

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici il faut faire attention aux indices car les variables X_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, \cdots, 10\}$. Donc si on veut calculer la matrice Q_1, il faut déterminer les probabilités $P(X_2 = j | X_1 = i)$ et donc le premier coefficient de la matrice sera $q_{0,0}$, le deuxième de la première ligne $q_{0,1} = P(X_2 = 1|X_1 = 1)$. Ainsi le coefficient de la ligne l et le colonne s sera $q_{l-1,s-1}$. Ainsi, dans notre cas, la matrice Q_1 est

$$\begin{pmatrix} P(X_2 = 0|X_1 = 0) & P(X_2 = 1|X_1 = 0) & \cdots & P(X_2 = 10|X_1 = 0) \\ P(X_2 = 0|X_1 = 1) & P(X_2 = 1|X_1 = 1) & \cdots & P(X_2 = 10|X_1 = 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(X_2 = 0|X_1 = 10) & P(X_2 = 1|X_1 = 10) & \cdots & P(X_2 = 10|X_1 = 10) \end{pmatrix}$$

En effet $q_{1,1} = P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 2/3$ car si la première lettre n'est pas un a, la probabilité pour que la deuxième lettre ne soit pas a est de $2/3$. De même $q_{1,2} = P(X_2 = 1|X_1 = 0) = 1/3$ car si la première lettre n'est pas un a, la probabilité pour que la deuxième lettre soit a en étant la première occurence est de $1/3$. Le calcul des autres coefficients se fait suivant la règle

$$q_{i,j} = P(X_2 = j-1, |X_1 = i-1) = 2/3 \text{ si } j-1 = 0, \ = 1/3 \text{ si } j-1 = i : \text{et } 0 \text{ ailleurs}$$

pour $i = 0, \cdots, 9$. Enfin $q_{10,1} = P(X_2 = 0|X_1 = 10) = 1$. Si nous calculons les autres Q_k, nous voyons que ces matrices sont toutes égales, la chaîne correspondante est donc homogène.

(3) Considérons un modèle de prévision météorologique très simple donné par : la probabilité pour qu'il pleuve demain ne dépend que du temps d'aujourd'hui. S'il pleut aujourd'hui, la probabilité pour qu'il pleuve demain est de p. S'il fait beau, elle est de q. On a donc une chaîne qui comprend deux états : 0 pour la pluie et 1 our le beau temps. Cette chaîne est homogène et sa matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

(4) Un joueur gagne 1 euro avec la probabilité p et perd 1 euro avec la probabilité $1-p$ à chaque mise dans un jeu aléatoire dont les répétitions sont supposées indépendantes. Il quitte la partie lorsqu'il a F euros en poche ou lorsqu'il est ruiné. L'évolution de ce processus est une chaîne de Markov homogène. On a $q_{00} = 1$ car s'il a 0 euro, il ne peut en gagner. De même, d'après le jeu, $q_{FF} = 1$. La matrice de transition est, pour $F = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1. *Une chaîne de Markov homogène est entièrement définie par la donnée de sa matrice de transition est celle de l'état initial*

$$\pi_0 = (P(X_0 = 1) = c_1, P(X_0 = 2) = c_2, \cdots, P(X_0 = N) = c_N)$$

qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

3.2. **Propriétés de la matrice de transition.** Supposons que la chaîne de Markov homogène prenne ses valeurs dans $\{1, \cdots, N\}$. La matrice de transition existe et vérifie

(1) $q_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j = 1, \cdots, N$,
(2) $q_{i1} + q_{i2} + \cdots + q_{iN} = 1$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, c'est-à-dire la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

Une telle matrice est appelée une **matrice stochastique**.

3.3. **Les matrices de transition $Q^{(m)}$.** Pour une chaîne de Markov homogène, la matrice de transition permet, à partir du vecteur π_0 de décrure la chaîne pas à pas. Nous allons montrer comment décrire cette chaîne pour un nombre de pas arbitraire.

Définition 4. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène. On appelle matrice de transition en m étapes la matrice $Q^{(m)}$ dont les éléments sont*

$$q_{ij}^{(m)} = P(X_m = j | X_0 = i).$$

Comme la chaîne est homogène, on a aussi

$$q_{ij}^{(m)} = P(X_m + n = j | X_n = i).$$

Par définition

$$Q^{(0)} = Id, \ Q^{(1)} = Q.$$

Théorème 1. Formules de Chapman-Kolmogorov. *Soient $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène et $Q^{(m)}$ sa matrice de transition en m étapes. Alors $Q^{(m)}$ est la puissance m-ième de la matrice de transition Q :*

$$Q^{(m)} = Q^m.$$

Ceci permet de déduira la loi de probabilité de la variable X_n

Théorème 2. Loi de probabilité de X_n. *Soient $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène et Q sa matrice de transition. Alors la loi de probabilité de X_n est donnée par le vecteur*

$$\pi_n = (P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = N) = \pi_0 \cdot Q^n$$

et

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{N} P(X_n = j | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i).$$

Exemples.

(1) Reprenons l'exemple des prévisions des jours de pluie (exemple 3, section 3.1). Supposons $p = 0,7$ et $q = 0,4$. Cherchons la probabilité pour qu'il pleuve le quatrième jour. Alors

$$Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot Q^2 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix} \ Q^4 = \begin{pmatrix} 0,5749 & 0,4251 \\ 0,5668 & 0,4332 \end{pmatrix}$$

On en déduit $P(X_4=0|X_0=0)=q_{00}^{(4)}=0,5749$. On a aussi

$$\pi_0=(P(X_0=0)=0,7,P(X_0=1)=0,4).$$

Donc

$$\begin{cases} \pi_4 & =(P(X_4)=0,P(X_4)=1) \\ & =\pi_0Q^4 \\ & =(0.7,0.4)\begin{pmatrix}0,5749 & 0,4251\\ 0,5668 & 0,4332\end{pmatrix} \\ & =(0,7\times 0,5749+0,4\times 0,5668, 0,7\times 0,4251+0,4\times 0,4332). \end{cases}$$

(2) On lance une pièce (P=pile, F=Face). On s'arrête lorsqu'on obtient pour la première fois PP ou FP. Il y a deux joueurs A et B. A parie sur PP et B sur FP. Cherchons la probabilité pour que B gagne. Chaque variable aléatoire correspond au résultat de deux lancers consécutifs (X_0 correspond au résultat du premier lancer d'une suite de deux lancers et X_1 au résultat des deux lancers consécutifs). Elles prennent leurs valeurs dans $E=\{P,F,PF,FF,PP,FP\}$. Ainsi

$$\begin{array}{ll}
q_{1,1}=P(X_1=P,|X_0=P)=0 & q_{1,2}=P(X_1=F,|X_0=P)=0,\\
q_{1,3}=P(X_1=PF,|X_0=P)=1/2 & q_{1,4}=P(X_1=FF,|X_0=P)=0,\\
q_{1,5}=P(X_1=PP,|X_0=P)=1/2 & q_{1,6}=P(X_1=FP,|X_0=P)=0.\\
q_{2,1}=P(X_1=P,|X_0=F)=0 & q_{2,2}=P(X_1=F,|X_0=F)=0,\\
q_{2,3}=P(X_1=PF,|X_0=F)=0 & q_{2,4}=P(X_1=FF,|X_0=F)=1/2\\
q_{2,5}=P(X_1=PP,|X_0=F)=0 & q_{2,6}=P(X_1=FP,|X_0=F)=1/2.
\end{array}$$

On calcule aisément les autres coefficients. La matrice de transition est donc

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

La probabilité d'atteindre PP et donc que A gagne est de $1/4$. Par contre la probabilité d'atteindre FP est plus complexe à calculer. On peut y arriver par le chemin

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[loop below] & FP \end{tikzcd}$$

La boucle sous l'étape F signifie que l'on peut rester sur cet état après avoir fait F, on refait un certain nombre de fois F. Ainsi la probabilité pour avoir FP est égale à

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^K+\cdots$$

Le premier terme de cette somme correspond au chemin DFP (D signifiant le départ), le deuxième au chemin $DFFP$, le troisième à $DFFFP$ etc... Cette somme est donc

$$\sum_{k\geq 2}(\frac{1}{2})^K.$$

C'est une série géométrique de raison 1/2 dont le premier terme est 1/4. Sa somme vaut

$$s = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Le deuxième chemin permettant d'arriver à l'état FP est

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] & P \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[loop below] & FP \end{tikzcd}$$

La probabilité d'arriver à FP par ce chemin est

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^4 + \cdots + (\frac{1}{2})^K + \cdots$$

Le premier terme de cette somme correspond au chemin $DPFP$, le deuxième au chemin $DPFFP$, le troisième à $DPFFFP$ etc... Cette somme est donc

$$\sum_{k\geq 3}(\frac{1}{2})^K.$$

C'est toujours une série géométrique de raison 1/2 mais le premier terme est 1/8. Sa somme vaut

$$s = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi la probabilité d'arriver à FP et donc à B de gagner est égale à

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

4. Graphe d'une chaîne de Markov homogène

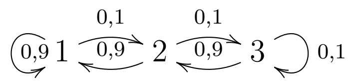
4.1. **Construction du graphe.** On considère une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{1, \cdots, N\}$. Soit $Q = (q_{ij})$ sa matrice de transition associée. On définit un graphe de la façon suivante :

(1) Les sommets sont $1, 2, \cdots, N$ c'est-à-dire toutes les valeurs prises par les variables de la chaîne.
(2) On a une flèche allant du sommet i vers le sommet j si $q_{ij} > 0$, cette flèche est orientée de i vers j.
(3) Lorsque pour un certain i, on a $q_{ii} \neq 0$, alors on tracera un lacet sur ce point.
(4) On pourra marquer sur chacune des flèches ou chacun des lacets la valeur q_{ij}.

Exemples

(1) Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : Bas, Intermédiaire, Haut. La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire. S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif bas, il y reste). S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante (s'il est déjà au tarif haut, il y reste). La compagnie d'assurance estime à 10 pour cent la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année. Ici, la variable aléatoire X_n qui

décrit la situation l'année n prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ où 1 désigne le tarif Bas, 2 l'Intermédiaire et 3 le tarif Haut. Le graphe associé à cette chaine de Markov est



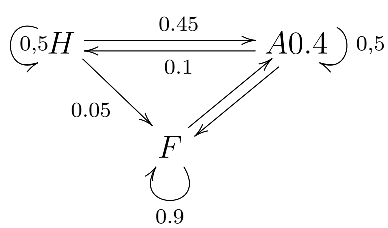
(2) On s'intéresse au développement d'une végétation à partir d'une parcelle en friche. Ce modèle comporte 3 états :
— L'état 1, noté H est celui d'une végétation constituée d'herbes.
— L'état 2, noté A est celui d'une végétation d'arbustes.
— L'état 3 noté F est une végétation de type forêt, avec de gros arbres.
On enregistre tous les deux ans l'état de la végétation toujours aux mêmes points de la parcelle. En l'instant initial, on enregistre l'état π_0 des proportions des trois états. On peut voir ces proportions comme des probabilités pour un point quelconque de la parcelle d'être dans un des états à l'instant initial. On suppose connues les 9 probabilités $q_{i,j} = P(X_1 = j|\ X_0 = i)$ pour chaque valeur $i, j \in \{H, A, F\}$ c'est-à-dire les probabilités pour un point quelconque de passer de l"état i à l'état j ;

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Ainsi $p_{1,1} = P(X_1 = H|X_0 = H) = 0,5, p_{1,2} = P(X_1 = A|X_0 = H) = 0,45, p_{1,3} = P(X_1 = F|X_0 = H) = 0,5$ etc. On en déduit

$$\pi_1(P(X_1 = H), P(X_1 = A), P(X_1 = F)) = \pi_0(P(X_0 = H), P(X_0 = A), P(X_0 = F))Q$$

On peut représenter le graphe de la façon suivante



4.2. **Chemins d'un état à un autre.**

Définition 5. *Une suite d'états $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ définit un chemin de longueur n allant de i_1 à i_n dans le graphe associé à une chaîne de Markov homogène si et seulement si*

$$q_{i_1,i_2} q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_{n-1},i_n} > 0.$$

On peut lire sur le graphe la probabilité pour qu'un pion placé sur l'état i emprunte un chemin fixé. Plus précisément, on a

Proposition 2. *Pour toute suite d'états $(i_0, i_1, i_2, \cdots, i_n)$, on a*

$$P(X_{n+k} = i_n, \cdots X_{k+1} = i_1|X_k = i_0) = q_{i_0,i_1} q_{i_1,i_2} q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_{n-1},i_n}.$$

5. Loi stationnaire

5.1. **Propriétés algébriques de la matrice de transition.** Nous avons vu que la mateice de transition Q d'une chaîne de Markov homogène était stochastique, c'est-à-dire une matrice

$$Q = (q_{i,j})$$

vérifiant

(1) $0 \leq q_{i,j} \leq 1$ pour tout i, j

(2) $\sum_{i=1}^{N} q_{i,j} = 1$, c'est-à-dire la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

Définition 6. *Soit Q est une matrice stochastique. On appelle vecteur stable pour Q un vecteur ligne non nul $v = (v_1, \cdots, v_N)$ tel que*

$$vQ = v$$

c'est-à-dire

$$(v_1, \cdots, v_N) \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,N} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N,1} & q_{N,2} & \cdots & q_{N,N} \end{pmatrix} = (v_1, \cdots, v_N).$$

D'une manière plus générale, on dit qu'un vecteur ligne w est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ s'il vérifie

$$w.Q = \lambda w.$$

On peut se rendre compte que cette équation est assez difficile à résoudre telle quelle car elle fait apparaître deux inconnues, le vecteur w et le scalaire λ. Un vecteur stable apparaît donc comme un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$. En l'état, on ne sait pas si cela existe et si oui, comment le calculer. On peut éventuellement résoudre le système linéaire

$$vQ = v$$

si la taille de Q n'est pas trop imposante !

Exemple Soit la matrice stochastique

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Le système

$$vQ = v$$

s'écrit en posant $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$(v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5v_1 + 0,2v_3 = v_1 \\ 0,5v_1 + v_2 + 0,4v_3 = v_2 \\ 0,4v_3 = v_3 \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\begin{cases} -0,5v_1 + 0,2v_3 = 0 \\ 0,5v_1 + 0,4v_3 = 0 \\ -0,6v_3 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$v_3 = 0, v_1 = 0$$

et v_2 est quelconque. Ainsi

$$v = (v_1, v_2, v_3) = (0, v_2, 0).$$

On peut imaginer de telles résolutions lorsque la matrice est de très grande taille, c'est-à-dire si le nombre des états est très grand. Nous verrons en exemple comme gérer les pages web via les chaînes de Markov. Chaque page est un état !

Pour commencer, il faudrait être assuré que le système $vQ = v$ admet au moins une solution. Ceci est assuré par le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit Q une matrice stochastique. Alors 1 est une valeur propre (ce qui signifie que $vQ = v$ admet toujours une solution autre que $v = 0$). De plus si λ est une valeur propre complexe (ce qui signifie que $vQ = \lambda v$ admet une solution autre que $v = 0$), alors le module de λ est inférieur ou égal à 1.*

Maintenant que nous sommes assurés que $vQ = v$ admet une solution, on aimerait que cette solution soit unique, dès lors que v représente une loi de probabilité, c'est-à-dire $v_1 + v_2 + \cdots + v_N = 1$. Ceci est le but du théorème suivant :

Théorème 3. Theorème de Perron-Frobenius *Soit Q une matrice stochastique. Alors 1 est toujours une valeur propre (ce qui signifie que $vQ = v$ admet toujours une solution autre que $v = 0$). De plus s'il existe une puissance k de Q telle que la matrice Q^k n'ait aucun coefficient nul, alors il existe une unique solution $v = (v_1, \cdots, v_N)$ de $vQ = Q$ telle que $v_1 + \cdots v_N = 1$ et $v_i \geq 0$ pour $i = 1, \cdots, N$.*

5.2. **Loi stationnaire.** Soit une chaîne de Markov d'espace d'états E et de matrice de transition Q. L'évolution au cours du temps de la loi de probabilité initiale π_0 est donnée par

$$\pi_1 = \pi_0 Q,\ \pi_2 = \pi_1 Q = \pi_0 Q^2, \cdots, \pi_n = \pi_{n-1} Q = \pi_0 Q^n.$$

La matrice de transition pour passer de l''état i à l'état $i + k$ est Q^k.

Définition 7. *Une loi de probabilité π sur l'espace des états E est appelée stationnaire pour la chaîne de Markov si l'on a*

$$\pi Q = \pi.$$

Exemple. Si nous considérons l'exemple précédent où la matrice de transition était

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

comme nous avons résolu le système $vQ = v$, nous en déduisons que la chaîne de Markov associée, qui a donc 3 états, admet une loi stationnaire

$$\pi = (0, 1, 0).$$

5.3. **La loi stationnaire comme loi limite.** Considérons la loi de l'état initial

$$\pi_0 = (P(X_0 = 1), \cdots, P(X_0) = N).$$

Nous avons vu que la donnée de la matrice de transition Q permet de trouver la loi à l'instant n :

$$\pi_n = (P(X_n = 1), \cdots, P(X_n) = N)$$

en utilisant la formule fondamentale

$$\pi_n = \pi_0 Q^n.$$

On peut donc se demander ce qui se passe lorsque n devient grand, ce qui peut être modélisé en étudiant la limite de π_n lorsque n tend vers l'infini. On admettra le résultat suivant

Lemme 1. *Si Q est une matrice de transition, alors la suite Q^n des puissances de Q admet une limite lorsque n tend vers l'infini.*

Si nous notons par $\widetilde{Q}$ cette limite :

$$\widetilde{Q} = \lim_{n \to +\infty} Q^n$$

alors toutes les colonnes de $\widetilde{Q}$ sont égales.

Corollaire 1. *La suite π_n converge vers une loi de probabilité $\widetilde{\pi}$ qui vérifie*

$$\widetilde{\pi}\widetilde{Q} = \widetilde{\pi}.$$

Cette loi est donc stationnaire.

6. Temps d'atteinte d'un état

6.1. **Temps d'atteinte d'un état.** Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène d'espace d'états E fini et de matrice de transition Q. La loi initiale π_0 de la chaîne est donnée. Il est clair que les seuls états qui interviennent dans l'étude de l'évolution de la chaîne sont ceux qui peuvent être atteints. Soit

$$E_a = \{i \in E, \exists n \geq 0, \text{tels que } P(X_n = i) > 0\}.$$

Définition 8. *Pour un état $i \in E$, le temps d'atteinte l'état $i \in E_a$ à l'instant n est le nombre $T_i^{(n)}$ défini par*

(1) $T_i^{(n)}$ est le plus petit entier $k > 0$ tel que $X_{n+k} = i$ si $X_n = i$,

(2) $T_i^{(n)} = +\infty$ si la chaîne ne passe pas par i après l'instant n.

Exemple. Considérons la chaîne de Markov décrivant l'évolution de la fortune d'un joueur. Si $T_0^{(0)} < +\infty$, alors le joueur est ruiné et le jeu s'arrête à cause de la ruine. Sinon, ce temps représente le nombre de parties jouées.

6.2. **Probabilité d'atteinte d'un état.** Soient i et j deux états de la chaîne de Markov homogène (X_n). On note par $f_{i,j}(k)$ la probabilité d'atteindre pour la première fois l'état j à l'instant $n+k$ après l'instant n sachant que $X_n = i$ soit

$$f_{i,j}(k) = P(T_j^{(n)} = k \mid X_n = i).$$

Proposition 4. *Cette probabilité vérifie :*

(1) $f_{,ij}(1) = q_{ij}$.

(2) Pour tout $k \geq 2$, $f_{i,j}(k) = \sum_{s \in E, s \neq j} q_{ij} f_{i,j}(k-1)$.

Démonstration. En effet

$$f_{ij}(1) = P(T_j^{(n)} = 1 \mid X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = q_{ij}$$

L'équation précédente traduit simplement le fait que pour arriver pour la première fois dans l'état$j$ en k pas, en partant de l'état i, il faut aller de l'état i à un état $s \neq j$, puis partant de s, arriver pour la première fois en j en $k-1$ pas. Cette probabilité permet de définir plus généralement la probabilité d'atteindre l'état j après l'instant n, sachant que $X_n = i$. Elle ne dépend pas de n et est donnée par

$$f_{i,j} = P(T_j^{(n)} < +\infty \mid X_n = i).$$

Elle vérifie :

$$f_{i,j} = q_{ij} + \sum_{s \in E, s \neq j} q_{is} f_{s,j}.$$

7. Une application : protocole de gestion des communications radios par satellite relais.

Cette application est tirée d'un mémoire de TIPE rédigé par Yongwe Jean-Luc.

Pour des raisons économiques et de complexité des réseaux, on a du trouver une alternative aux réseaux à cables reliant des ordinateurs à un nombre croissant de terminaux se trouvant à des distances de plus en plus en grandes. Cette alternative fut trouvée dans les communications radios via un satellite relais. Pour que cette alternative soit opérationnelle, il faut résoudre le problème d'optimisation de l'utilisation d'un même canal radio par plusieurs utilisateurs distincts dont la transmission des données se fait par " paquets d'informations " de longueurs fixées. Mais lorsque des utilisateurs envoient des paquets d'informations simultanément, il peut apparaître des interférences nuisibles.

Comment fonctionne ce système ? En supposant tous les paquets de taille constante, on peut découper le temps de référence (temps canal) par tranches égales à la durée d'un paquet dans le canal de 10^{-6} secondes. Les transmissions ne sont permises qu'au début d'une tranche. Chaque fois que 2 paquets ou plus sont émis simultanément, ils interfèrent et sont provisoirement perdus. Ils doivent donc être à nouveau émis de façon aléatoire, et il faut limiter les débordements de buffer (espaces mémoires-tampons où sont stockés provisoirement les paquets).

Le modèle mathématique est le suivant ; Soit M le nombre d'usagers à un instant t supposé entier. Tout usager a deux états possibles :

(1) l'état A ou actif : il emet un paquet avec une loi de Bernoulli de paramètre σ, où σ désigne le taux d'émission et le paquet est directement envoyé.

(2) l'état B ou bloqué : il a émis le paquet mais celui-ci a été bloqué. Il doit donc être émis à nouveau suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, où p est une caractéristique de la politique de réémission. Le déblocage des paquets se fait un par un car le canal ne peut transporter qu'un seul paquet à la fois.

Soit $X(t)$ le nombre de terminaux bloqués à l'instant t. Le processus caractérisant l'état du système est une chaîne de Markov. La matrice de transition est définie par

$$q_{i,j} = P(X(t+1) = j \mid X(t) = i)$$

avec $0 \leq i \leq M$. C'est la probabilité que j terminaux soient bloqués si i terminaux le sont déjà. Déterminons ces probabilités.

(1) $q_{i,j} = 0$, si $j \leq i-2$. En effet comme le déblocage se fait un par un, la probabilité de voir 2 terminaux ou plus se débloquer est nulle.

(2) $q_{i,i-1} = i \times p \times (1-p)^{i-1} \times (1-\sigma)^{M-i}$. C'st la probabilité qu'il y ait un terminal bloqué en moins si aucun des terminaux non bloqués n'a émis.

(3) $q_{i,i} = (1-p)^i \times (M-i) \times \sigma(1-\sigma)^{M-i-1} + (1-ip(1-p)^{i-1})(1-\sigma)^{M-i}$. C'est la probabilité pour qu'aucun des terminaux bloqués n'émette à nouveau si un seul des terminaux non bloqués émet ou bien si aucun des terminaux non bloqués n'émet. ils émettent tous à nouveau sauf un parmi les terminaux bloqués

(4) $q_{i,i+1} = (M-i)\sigma(1-\sigma)^{M-i}(1-(1-p)^i)$. C'est la probabilité pour qu'un seul des terminaux non bloqués émette si aucun des terminaux bloqués n'émet à nouveau.

(5) Si $j \geq i-2$, $q_{i,j} = \dfrac{(M-i)!}{(j-i)!(M-j)!}\sigma^{j-i}(1-\sigma)^{M-j}$. C'est la probabilité pour que les terminaux non bloqués émettent et qu'il y ait 2 terminaux ou plus qui se rajoutent à ceux qui sont bloqués à l'étape t.

EXERCICES

Exercice 1. Soit une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 3/10 \\ 1/10 & 8/10 & 1/10 \\ 6/10 & 0 & 4/10 \end{pmatrix}$$

On suppose que

$$\pi_0 = (1/2, 1/2, 0).$$

Calculer π_1, π_2, π_3.

Exercice 2. Soit une chaîne de Markov homogène à deux états A et B.

(1) Ecrire la forme générale de la matrice de transition et dessiner le graphe.

(2) Soit $\alpha = P(X_1 = B|X_0 = A)$ et $\beta = P(X_1 = A|X_0 = B)$. A quelles conditions Q satisfait les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius ?

(3) Soit $\pi_0 = (1, 0)$. calculer π_1,π_2. Vers quoi converge π_n (on pourra prendre $\alpha = 0,4, \beta = 0,5$.

Exercice 3. Le modèle de diffusion d'Ehrenfest. Deux urnes A et B contiennent, à elles deux , N boules, numérotées de 1 à N. A chaque instant, on choisit une boule de façon uniforme, et on la change d'urne. X_n correspond alors au nombre de boules contenues dans l'urne A à l'instant n. L'ensemble des états est donc l'ensemble $E = \{0, 1, \cdots, N\}$. On suppose qu'en l'instant 0 l'urne B est vide. On veut savoir au bout de combien de temps, l'urne A est de nouveau vide.

(1) Déterminer π_0 et π_1.

(2) On suppose maintenant $N = 3$. Déterminer la matrice de transition.

(3) Déterminer une loi invariante ? Est-ce que le processus converge vers cette loi ?

Ce processus décrit de façon simplifiée la diffusion d'un gaz d'un récipient A vers un récipient B initialement vide (chaque boule représente une molécule).

Exercice (extrait du livre de Marc ou Francine Diener) Une souris se déplace dans un labyrinthe représenté ci-dessous qui comporte 5 compartiments numérotés de 1 à 5. On suppose qu'elle change de compartiment à chaque instant $t = 0, 1, 2, 3, \cdots$ et que, lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes ($k = 1, 2$ ou 3), elle choisit l'une des portes avec la probabilité $1/k$, ses choix étant indépendants à chaque instant de ceux qu'elle a fait auparavant. Le cheminement de la souris peut être décrit par une chaîne de Markov (X_t), $t = 0, 1, 2, \cdots$ dont les états sont les 5 compartiments et la matrice de transition Q la matrice des probabilités de passage d'un compartiment à un autre. Par exemple $q_{1,2} = 1/2$ car le compartiment 1 contient 2 portes dont l'une vers le compartiment 2.

(1) Ecrire la matrice de transition

(2) Calculer les probabilités des cheminements suivants : $(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3, X_4 = 5)$ et $(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 5)$.

(3) Calculer la probabilité que la souris, partant à l'instant initial du compartiment 1, atteigne le compartiment 5, en 2 étapes, en 3 étapes, en 4 étapes.

(4) On ne considére plus désormais que la souris part nécessairement du compartiment 1. On étudie une autre distribution initiale sur l'ensemble des états de cette chaîne de Markov définie de la façon suivante : la probabilité de chaque compartiment est proportionnelle au nombre de portes du compartiment. Préciser qu'elle est cette distribution initiale.

(5) Cette loi de probabilité est-elle une loi stationnaire pour la chaîne de Markov considérée ? Pourquoi ?

Exercice L'algorithme PageRank utilisé par Google.. Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabiliste), dont les N sommets sont les pages, et les flèches les liens qui pointent d'une page à une autre. Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence. Comment mesurer la pertinence d'une page ? L'algorithme PageRank utilisé par Google utilise pour cela une méthode probabiliste. Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard. Quand il est sur une page,

(1) Soit, avec une probabilité $1-p$, il clique au hasard sur l'un des liens disponibles depuis cette page ;

(2) Soit, avec une probabilité p, il choisit une page au hasard dans l'ensemble du réseau.

Cette deuxième possibilité permet d'assurer que toute page peut être atteinte : ainsi le théorème de Perron-Frobenius s'appliquera. A titre d'exemple, supposons que le réseau ne comporte que 4 pages A, B, C, D. La page A possède un lien avec les pages B et C, la page B possède un lien avec les pages C et D, la page C possède un lien avec les pages A et D, et la âge D possède un lien avec A.

(1) Déssiner le graphe associé et calculer la matrice de transition. On suppose pour cela $p = 0,16$.

(2) Vérifier que le théorème de Perron-Frobenius s'applique.

(3) Déterminer par itération la loi limite et par calcul direct. On prendra

$$\pi_0 = (1, 0, 0, 0).$$