CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Cours Michel GOZE- Elisabth REMM

Chapitre 1

Recherche Opérationnelle. Modélisation mathématique

Dans ce chapitre, on va présenter quelques problèmes d'optimisation, conduisant donc à le recherche d'un maximum ou d'un minimum d'une certaine fonction économique, qui pourra être traité par les techniques présentées par la suite.

1. Recherche d'un profit dans une usine de fabrication

Cet exemple est issu du cours de François Boulier, Université de Lille. Une aciérie produit des bandes et des rouleaux métalliques. Elle fonctionne 40 heures par semaine. Les vitesses de production sont de 200 bandes par heure et de 140 rouleaux par heure. Les bandes sont vendues 25 euros l'unité ; les rouleaux 30 euros l'unité. Le marché est limité : il est impossible de vendre plus de 6000 bandes et 4000 rouleaux par semaine. Comment maximiser le profit ?

Comment modéliser ce problème. Ceci signifie que l'on veut transférer ce problème en un problème mathématiques, choix des inconnues, des équations, afin que la solution mathématique (si on sait la trouver) corresponde à une solution de notre problème initial.

Pour modéliser, on dégage

(1) les variables (ce qu'on cherche à calculer),
(2) les paramètres (les données numériques présentes dans l'énoncé ou qui se calculent facilement à partir de ces dernières),
(3) les contraintes,
(4) l'objectif (il n'y en a qu'un).

Les variables sont généralement des nombres réels, bien que du point de vue calcul formel mathématique ce ne soit pas la panacée. Parfois ce sera des nombres entiers, mais dans ce cas le calcul algébrique n'est pas intimement adapté. Les contraintes seront données sous forme d'équations. Dans ce qui nous intéresse ici, on espère que ces contraintes s'expriment sous forme d'équations linéaires. Sinon, on devra utiliser d'autres techniques, qui n'existent pas toujours, que celles présentées dans les chapitres qui suivent. Sur l'exemple, les variables sont

(1) x_1 le nombre de bandes à produire,

(2) x_2 le nombre de rouleaux à produire

On supposera, pour simplifier la technique mathématique utilisée que ces variables sont réelles (en fait ce sont par nature des entiers positifs ou nuls, mais la résolution des systèmes linéaires en nombres entiers est renvoyée à plus tard.

L'objectif consiste à maximiser la fonction économique

$$f(x_1, x_2) = 25x_1 + 30x_2$$

correspondant au profit en euros. Il nous reste à décrire les contraintes :

(1) Les variables x_1 et x_2 correspondant à des nombres d'objets sont positives : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

(2) Il est impossible de vendre plus de 6000 bandes par semaine : ceci se traduit par $x_1 \leq 6000$.

(3) il est impossible de vendre plus de 4000 rouleaux par semaine : ceci se traduit par $x_2 \leq 4000$. Notons que ces contraintes impliquent que le profit que nous calculerons sera celui ramené à une semaine.

(4) Les vitesses de production sont de 200 bandes par heure et de 140 rouleaux par heure et l'usine fonctionne 40 heures par semaine. Ceci se traduira par l'équation $\dfrac{x_1}{200} + \dfrac{x_2}{400} \leq 40$.

En résumé, nous devons résoudre le problème mathématique suivant :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ x_1 \leq 6000, \\ x_2 \leq 4000, \\ \dfrac{x_1}{200} + \dfrac{x_2}{400} \leq 40, \\ Max(f(x_1, x_2) = 25x_1 + 30x_2). \end{cases}$$

2. Gestion d'une brasserie

Cet exemple est issu du cours de Julian Tugaut. Un brasseur de bière dispose de 240 kg de maïs, de 5 kg de houblon et de 595 kg de malt. Il peut produire aussi bien de la bière blonde que de la bière brune. Un tonneau de bière blonde nécessite 2.5 kg de maïs, 125g de houblon et 17.5 kg de malt. Chaque tonneau produit un bénéfice net de 65 euros. Un tonneau de bière brune nécessite 7.5 kg de maïs, 125g de houblon et 10 kg de malt. Chaque tonneau produit un bénéfice net de 115 euros. On suppose que les autres ingrédients (comme l'eau) sont disponibles en quantité illimitée : on ne tiendra donc pas compte de leurs coûts. Quel est, pour le brasseur, le meilleur plan de production ? En d'autres termes, quel est le plan de production lui fournissant le bénéfice maximum avec les stocks disponibles ?

Modélisons ce problème. Les variables seront x_1 le nombre de tonneau de bière blonde, x_2 le nombre de tonneaux de bière brune. Evidemment on a $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ et ces variables sont entières, mais nous allons les supposer réelles. La fonction à maximiser et

$$f(x_1, x_2) = 65x_1 + 115x_2$$

exprimée en euros. Les contraintes concernent les quantités de maïs, de houblon et de malt utilisées :

$$2,5x_1 + 7,5x_2 \leq 240$$

pour le maïs,

$$0,125x_1 + 0,125x_2 \leq 5$$

pour le houblon et

$$17,5x_1 + 10x_2 \leq 595$$

pour le malt. On est donc ramené à résoudre le problème :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \\ 2,5x_1 + 7,5x_2 \leq 240, \\ 0,125x_1 + 0,125x_2 \leq 5, \\ 17,5x_1 + 10x_2 \leq 595, \\ Max(f(x_1,x_2) = 65x_1 + 115x_2). \end{cases}$$

3. Un problème réduit de voyageur de commerce

Un étudiant en quête d'une université projette de visiter les campus de trois universités du Maine au cours d'un voyage unique, débutant et finissant à l'aéroport de Portland. Les trois établissements sont dans les villes de Brunswick, Lewiston, et Waterville, et l'étudiant ne veut visiter chaque ville qu'une seule fois, tout en maintenant le trajet total le plus court possible. Les distances entre ces villes sont données dans le tableau suivant

Villes	*Portland*	*Brunswick*	*Lewinston*	*Waterville*
Portland	0	26	34	78
Brunswick	26	0	18	52
Lewinston	34	18	0	51
Waterville	78	52	51	0

Table 1– Distances entre les villes (miles)

Construisons un modèle mathématique. Le problème qui se pose ici, alors qu'il était quasi-évident dans les exemples précédents est celui du choix des variables. Chaque trajet consiste en une série de petits déplacements entre deux villes, il est raisonnable d'assigner des variables aux décisions de partir ou non d'une ville vers une autre. Pour plus de faciliter, numérotons les villes comme suit : 1 pour Portland, 2 pour Brunswick, 3 pour Lewiston et 4 pour Waterville. Ainsi, nous aurons une variable

$$x_{1,2} = \begin{cases} 1 & \text{si l'étudiant voyage de Portland à Brunswick au cours de son parcours total} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme il n'y a pas de voyage d'une ville vers cette même ville, nous avons

$$x_{i,i} = 0, \quad i = 1, ..., 4.$$

Une fois les variables choisies, nous pouvons essayer de formuler le problème. Ce processus est en fait souvent une manière utile pour guider le choix des variables. Chaque ville ne devant être visitée qu'une seule fois, elle ne peut apparaître qu'une seule fois comme ville d'arrivée. En d'autres termes, pour j fixé, il existe un et un seul i, $i \neq j$ tel que $x_{i,j} \neq 0$. On en déduit donc

$$x_{1,j} + x_{2,j} + x_{3,j} + x_{4,j} = 1,$$

quel que soit $j, j = 1, \cdots, 4$. De même, en se préoccupant des villes de départ, on déduit

$$x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} + x_{i,4} = 1,$$

quel que soit $i, i = 1, \cdots, 4$. Il nous reste également à éliminer les trajets aller-retour entre deux villes sans passer par les autres, par exemple on ne peut considérer la situation suivante $x_{1,2} = x_{2,1} = 0, x_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas. Pour cela on ajoutera la contrainte suivante

$$x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \cdots, 4.$$

Enfin, si on note $a_{i,j}$ la distance entre les villes i et j, le problème consiste à minimiser la fonction

$$f(x_{1,2}, x_{1,3}, \cdots, x_{2,4}, x_{3,4}) = \sum_{i \neq j \in \{1, \cdots, 4\}} a_{i,j} x_{i,j}.$$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,1}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,4}, x_{4,1}, x_{4,2}, x_{4,3} \in \{0,1\} \\ x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 1, \\ x_{2,1} + x_{2,3} + x_{2,4} = 1, \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,4} = 1, \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} = 1, \\ x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 1, \\ x_{1,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = 1, \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{4,3} = 1, \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 1, \\ x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \cdots, 4, \\ Max(x_{1,2}a_{1,2} + x_{1,3}a_{1,3} + x_{1,4}a_{1,4} + x_{2,1}a_{2,1} + \cdots + x_{3,4}a_{3,4} + x_{4,1}a_{4,1} + x_{4,2}a_{4,2} + x_{4,3}a_{4,3}) \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu explicitement. Le chemin minimal est

$Portland \rightarrow Brunswick \rightarrow Waterville \rightarrow Lewiston \rightarrow Portland.$

avec une distance totale de 163 miles. Il est cependant clair qu'une telle stratégie de résolution ne fonctionne plus comme le nombre de villes augmente. C'est le problème général appelé souventt problème du voyageur de commerce.

4. Le problème général du voyageur de commerce

En informatique, le problème du voyageur de commerce est un problème d'optimisation qui, étant donné une liste de villes, et des distances entre toutes les paires de villes, détermine un plus court chemin qui visite chaque ville une et une seule fois et qui termine dans la ville de départ.

Malgré la simplicité de son énoncé, il s'agit d'un problème d'optimisation pour lequel on ne connait pas d'algorithme permettant de trouver une solution exacte rapidement dans tous les cas. Plus précisément, on ne connait pas d'algorithme en temps polynomial. La version décisionnelle de ce problème s'énonce ainsi pour une distance D, existe-t-il un chemin plus court que D passant par toutes les villes et qui termine dans la ville de départ ?

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié ce problème pour $N = 4$, où N est le nombre de ville. Notons que la ville de départ (et d'arrivée) était déjà fixée. Mais ceci n'est pas une contrainte. Désignons par P, B, W, L ces quatre villes par leurs initiales. Les chemins possibles sont donc

$$PBWLP, PBLWP, PLBWP, PLWBP, PWLBP, PWBLP.$$

On a donc, en ne regardant que l'aspect combinatoire, 6 chemins possibles. Toutefois les chemins "symétriques" $(PBWLP, PLWBP), (PBLWP, PWLBP), (PLBWP, PWBLP)$ peuvent être identifiés. Il ne reste donc que 3 candidat :

$$PBWLP, PBLWP, PLWBP.$$

On peut donc calculer le chemin le plus court en comparant les trois valeurs possibles et on retrouve comme solution

$$PBWLP.$$

Cette méthode combinatoire est séduisante. Toutefois, notons que si le nombre de ville augmente, le nombre de chemin "non symétriques" également mais de façon exponentielle. En fait, si le problème comporte N villes, le nombres de chemin "non symétriques" sera

$$\frac{(N-1)!}{2}.$$

Ainsi pour $N = 4$ on retrouve bien 3 chemins candidats. Par contre si $N + 10$ (ce qui est peu) on aura

$$\frac{9!}{2} = 181440$$

chemins dont il faut calculer la distance. C'est encore un sujet de recherche actuel que de trouver un algorithme efficace qui résous ce problème.

5. Un problème de transport

Une entreprise de pâtes alsaciennes stocke ses produits dans trois dépôts que nous appellerons D_1, D_2 et D_3. Les quantités stockées dans ces dépôts sont q_1, q_2 et q_3. Ces dépôts servent à alimenter des magasins de vente M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5. La quantité de pâtes nécessaire au magasin M_I est notée m_i. Tous ces transports ont un coût. Notons $c_{i,j}$ le coût de transport par unité de produit, pour le transport du dépôt D_i au magasin M_j. Le problème est de savoir quelle quantité doit livrer le dépôt D_j au magasin M_I afin de minimiser les coûts du transport.

Notons par $x_{i,j}$ la quantité de pâtes que livre le déptt D_i au magasin M_j. On a bien entendu

$$x_{i,j} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Si q_i est la quantité stockée au dépôt D_i, on a la contrainte :

$$x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} + x_{i,4} + x_{i,5} \leq q_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Chaque magasin M_j désire recevoir (au moins) la quantité de pâtes demandée m_j, soit

$$x_{1,j} + x_{2,j} + x_{3,j} \geq m_i,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

La fonction économique à minimiser est la fonction

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots, x_{1,5}, x_{2,1}, \cdots, x_{3,5}) = c_{1,1}x_{1,1} + c_{1,2}x_{1,2} + \cdots + c_{1,5}x_{1,5} + c_{2,1}x_{2,1} + \cdots + c_{3,5}x_{3,5}.$$

En résumé, on doit résoudre

$$\begin{cases} x_{i,j} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} + x_{i,4} + x_{i,5} \leq q_i,\ i = 1, 2, 3, \\ x_{1,j} + x_{2,j} + x_{3,j} \geq m_i,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ Min(c_{1,1}x_{1,1} + c_{1,2}x_{1,2} + \cdots + c_{1,5}x_{1,5} + c_{2,1}x_{2,1} + \cdots + c_{3,5}x_{3,5}). \end{cases}$$