CNAM MULHOUSE .

Technicien Développeur Année 1.

Outils mathématiques

Cours Michel GOZE

Chapitre 4

Relations d'Equivalence. Relations d'Ordre

Table des matières

1. Relations, Relations d'équivalence

1.1. **Notions de relation.** Soit A un ensemble. On appelle relation (binaire) dans A, une propriété concernant les couples (x, y) d'éléments de A. Le schéma d'une relation ressemble donc à ceci

$$\begin{array}{ccc} \textit{sujet} & \textit{verbe} & \textit{image} \\ x \in A & \cdots & y \in A \end{array}$$

Pour abréger, nous caractériserons ces relations par

$$x\mathcal{R}y$$

qui se lira x est en relation avec y.

Exemples

(1) Soit A l'ensemble des droites du plan. Alors D est perpendiculaire à D' est une relation dans A.
(2) Soit $A = \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Alors $x < y$ est une relation dans $\mathbb{R}$.
(3) La relation d'égalité est également un exemple fort simple de relations.

Définition 1. *Une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble A est dite*

— *(R)* **Réflexive** *si pour tout $x \in A$,*

$$x\mathcal{R}x$$

— *(S)* **Symétrique** *si pour tout $x, y \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ implique } y\mathcal{R}x$$

— *(T)* **Transitive** *si pour tout $x, y, z \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \text{ implique } x\mathcal{R}z$$

— *(AS)* **AntiSymétrique** *si pour tout $x, y \in A$*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \text{ implique } x = y.$$

1.2. **Relation d'équivalence.**

Définition 2. *Une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble A est dite relation d'équivalence si elle est*

— *(R)* **Réflexive**
— *(S)* **Symétrique**
— *(T)* **Transitive**

Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, $x\mathcal{R}y$ se lit souvent x est équivalent à y. —

Exemples

(1) Soit A l'ensemble des droites du plan. Alors
   D est parallèle à D'
   est une relation d'équivalence. En effet elle est
   (a) (R) Réflexive car D est parallèle à elle même,
   (b) (S) car si D est parallèle à D' alors D' est parallèle à D
   (c) (T) transitive car si D est parallèle à D' et D' parallèle à D'' alors D est parallèle à D''.

Notons que la relation $D \perp D'$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni réflexive, ni transitive. En effet $D \perp D'$ et $D' \perp D''$ implique $D \parallel D''$.

(2) Soit $A = \mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs. On se donne un entier $p \geq 1$. Définissons la relation suivante : soient n et n' des éléments de $\mathbb{Z}$. Alors

n est congru à n' si $n - n'$ est un multiple de p.

Cette relation est d'équivalence. En effet elle est

(a) (R) réflexive car $n - n = 0$ est multiple de p

(b) (S) symétrique car si $n - n' = kp$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $n' - n = (-k)p$ et $-k \in \mathbb{Z}$.

(c) (T) Transitive, car si $n - n' = kp$ et $n' - n'' = k_1 p$ avec $k, k_1 \in \mathbb{Z}$, alors

$$n - n'' = n - n' + n' - n'' = kp + k_1 p = (k + k_1)p$$

et $n - n''$ est aussi un multiple de p.

Cette relation d'équivalence est souvent noté

$$n \equiv n' \pmod{p}$$

et se lit n est congru à n' modulo p. Nous avons étudié en détail cette relation, qui est le point central de l'arithmétique dans le chapitre 2.

(3) La relation d'égalité est également un exemple fort simple de relation d'équivalence.

1.3. **Classes d'équivalence.** Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Etant donné $x \in A$, on appelle **classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$** l'ensemble $\mathcal{C}_x$ formé des $y \in A$ vérifiant

$$x\mathcal{R}y.$$

Cet ensemble n'est jamais vide car il contient x car la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors si x et y sont équivalents modulo $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}y$, alors les classes d'équivalence coïncident :*

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y.$$

Inversement deux éléments qui ont même classe d'équivalence sont équivalents modulo $\mathcal{R}$.

Démonstration. En effet si $x\mathcal{R}y$, alors par définition de $\mathcal{C}_x$, $y \in \mathcal{C}_x$ ce qui implique $\mathcal{C}_y \subseteq \mathcal{C}_x$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on a aussi $y\mathcal{R}x$ et donc $x \in \mathcal{C}_y$. D'où $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}_y$ et donc $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Réciproquement si $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$, comme $y \in \mathcal{C}_y$, alors $y \in \mathcal{C}_x$ et donc y est équivalent à x.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A. Alors si x et y ne sont équivalents pas modulo $\mathcal{R}$, alors les classe d'équivalences sont disjointes :*

$$\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$$

Démonstration. En effet soit $z \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$. On a donc $z \in \mathcal{C}_x$ et donc $z\mathcal{R}x$ et aussi $z \in \mathcal{C}_y$ et donc $z\mathcal{R}y$. Comme la relation d'équivalence est transitive, on en déduit $x\mathcal{R}y$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit qu'un tel z n'existe pas et donc $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$.

Conséquences. Etant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A, les classes d'équivalence ont les propriétés suivantes

(1) Soient $\mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_y$ deux classes. Alors soit $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$, soit $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y. = \emptyset$.

(2) La réunion de toutes les classes d'équivalence est l'ensemble A en entier.

On dit alors que l'ensemble des classes d'équivalence associées à la relation $\mathcal{R}$ forme une partition de A. Donnons la définition générale de cette notion :

Définition 3. *Soit $\{B_i\}_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de sous-ensembles de A. Cette famille forme une partition finie de A si*

(1) $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$,

(2) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{i=n} B_i = A$.

Notons, sans le démontrer, qu'en fait toute partition peut être vue comme une partition donnée par les classe d'équivalence d'une relation d'équivalence. Chaque sous-ensemble de cette partition étant alors constitué d'éléments équivalents.

Exemple. Considérons dans A relation de congruence modulo 2, soit

$$x \equiv y \pmod 2.$$

Ceci signifie que $n - n'$ est un multiple de 2. On a donc

$$n - n' = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Déterminons les classes d'équivalence. Prenons tout d'abord $n = 0$ Alors n' est équivalent à 0 si $n' = 2k$ c'est-à-dire si n' est un nombre pair. On peut donc écrire

$$\mathcal{C}_0 = 2\mathbb{Z} = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Prenons maintenant $n = 1$. Il n'est pas dans la classe de 0. Ainsi sa classe est distincte de $\mathcal{C}_0$. Dans ce cas $n \equiv 1$ si

$$n = 1 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci signifie que $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des nombres impairs. Comme tout entier est soit pair soit impair, il n'existe plus d'autre classe d'equivalence distincte de ces deux. On a bien

$$\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset,$$

et

$$\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 = \mathbb{Z}.$$

2. Relations d'ordre

2.1. **Definition.**

Définition 4. *Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble A est appelée relation d'ordre si elle est*
- *(R)* **Réflexive**
- *(AS)* **AntiSymétrique**
- *(T)* **Transitive**

Un ensemble A muni d'une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné.

Exemples.

(1) Sur les ensembles $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, la relation

$$x \leq y$$

est une relation d'ordre. Notons que l'inégalité stricte

$$x < y$$

n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

(2) Dans l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ la relation $\subseteq$ est une relation d'ordre.

(3) Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \cdots\}$ la relation

$$x \text{ divise } y$$

relation d'ordre.

2.2. **Ensembles totalement ordonnés.** Dans le premier exemple ci-dessus, on peut remarquer que tous les éléments sont comparables. Ceci signifie que quel que soient x et y dans A (ici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Il n'en est plus de même dans les deux autres exemples. Par exemple, dans le dernier, les éléments 2 et 3 ne sont pas comparables, on n' a ni 2 divise 3, ni 3 divise 2.

Définition 5. *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur A. Deux éléments x et y de A sont dits comparables si l'on a*

$$x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x.$$

Si deux éléments quelconques de A sont comparables, on dit que l'ensemble ordonné A est totalement ordonné.

Une relation d'ordre sur l'ensemble A est dite totale si deux éléments quelconque de A sont toujours comparables, c'est-à-dire si

$$\forall x, y \in A, \; x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemples. 1. Sur les ensembles $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, la relation

$$x \leq y$$

est une relation d'ordre total.

2. Soit E un ensemble et soit $A = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. La relation $\subset$ dans A est une relation d'ordre partiel.

Par exemple, comme nous l'avons vu ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ la relation d'ordre $x \leq y$ est totalement ordonnée. Par contre pour tout ensemble A, l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ avec la relation d'ordre $B_1 \subseteq B_2$ n'est pas totalement ordonnée.

2.3. **Majorants, minorants.** Soit A un ensemble ordonné (c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre). Notons par $\leq$ cette relation d'ordre.

Définition 6. *Soit B une partie de A. On dit qu'un élément M de A est un majorant de B si*

$$\forall x \in B, \; x \leq M.$$

On dit qu'un élément $m \in A$ est un minorant de B si

$$\forall x \in B, \; m \leq x.$$

Notons qu'un majorant du sous-ensemble B n'est pas nécessairement dans B. C'est en général un élément de A. Lorsque un majorant M de B est aussi dans B, alors il est unique et on dit que c'est un maximum de B. On le note

$$M = \max(B).$$

De même un minorant du sous-ensemble B n'est pas nécessairement dans B. C'est en général un élément de A. Lorsque un minorant M de B est aussi dans B, alors il est unique et on dit que c'est un minimum de B. On le note

$$M = \min(B).$$

Remarque. Soit B une partie de l'ensemble ordonné A. Si B admet un majorant, en général ce majorant n'est pas unique. Sauf, comme on vient de le voir si ce majorant est dans B. Sinon, on peut considérer l'ensemble de tous les majorants de B. C'est un sous-ensemble de A et on peut considérer la relation d'ordre sur ce sous-ensemble, que l'on va noter $maj(B)$. Si $maj(B)$ admet un minimum (qui sera un majorant de B), ce minimum est alors unique. On le note $BI(M)$ et est appelée la borne inférieure de B :

$$BI(M) = \min(maj(B).$$

C'est le plus petit des majorants. Il n'existe pas toujours, et s'il appartient à B, alors il coïncide avec $\max(B)$.

On définit de même la borne inférieure comme le plus grand des minorants.

3. Graphe et matrice associés à une relation

3.1. **Graphe.** Une relation $\mathcal{R}$ entre éléments d'un ensemble A peut être vue comme un sous-ensemble de $A \times A$. Lorsque A est un ensemble fini, on peut visualiser cette relation par un graphe, les sommets étant les éléments de A et une arête orientée (une flèche) est dessinée de x vers y dès que l'on a $x\mathcal{R}y$. Le cas particulier $x\mathcal{R}x$ se représentera donc par une boucle au point x. Si la relation est réflexive, on aura donc une boucle à chaque sommet. Si elle est symétrique, on aura entre deux sommets en relation deux flèches de direction opposée.

Si la relation est une relation d'équivalence, il est facile sur le graphe de déterminer la classe d'équivalence d'un élément donné x. C'est l'ensemble des sommets qui peuvent être reliés à x.

Si la relation est une relation d'ordre total, chaque sommet est relié à tous les autres.

3.2. **Matrice.** Rappelons qu'une matrice de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes comortant donc mn éléments (que l'on écrit à l'intersection des lignes et des colonnes). La matrice est dite carrée si $m = n$. Voici un exemple de matrice carrée d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur l'ensemble fini A comportant n éléments :

$$A = \{a_1, \cdots, a_n\}.$$

Nous allons lui associer une matrice carrée d'ordre n dite matrice de la relation $\mathcal{R}$. Elle est ainsi définie :

Si on note par $t_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à la ligne numéro i et à la colenne numéro j, alors

$$\begin{cases} t_{i,j} = 1 & \text{si} \quad a_i \mathcal{R} a_j, \\ t_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice ne contient donc que des 1 et des 0. Si la relation est réflexive , alors tous les éléments de la "diagonale" valent 1 :

$$t_{i,i} = 1, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Si la relation est symétrique alors $t_{i,j} = t_{j,i}$.

Exemple. Soit $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ et considérons la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x divise y. La matrice associée est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICES Chapitre 3

Exercice 1. Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

(1) $A = \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$.
(2) $A = \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N},\ y = px^q$.
(3) Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la relation d'équivalence

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x = x'.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de $(1, 1)$

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est pair.}$$

Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation ?

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou si } x = x', y \leq y'.$$

Démontrer que ceci définit une relation d'ordre.

Exercice 5. Soit $a = 1, 2, 3, 4$ et la relation binaire sur dont le graphe est

$$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

(1) Vérifier que la relation est une relation d'équivalence.
(2) Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient .

Exercice 6. Soient une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par par :

$$(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'.$$

(1) Montrer que est une relation d'équivalence.
(2) Supposons p et q premiers entre eux. Décrire la classe d'équivalence de ( ).

Exercice 7. Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :

$$A\mathcal{R}B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \complement_E B.$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 8. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation

$$n\mathcal{R}m \quad \text{si et seulement si } n + m \text{ est pair.}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Exercice 8. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation sur E en posant, pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$x\mathcal{R}x' \iff f(x) = f(x').$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) Décrire la classe d'équivalence $cl(x)$ de l'élément $x \in E$

(3) Notons par $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que l'application

$$\pi : E/\mathcal{R} \to F$$

donnée par

$$\pi(cl(x)) = f(x)$$

est bien définie.

Exercice 9. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}x' \iff \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x' = x^n.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 10. Soit $\leq$ une relation d'ordre sur l'ensemble A. Soit B un sous-ensemble de A. Montrer que si B admet un maximum M, alors ce maximum est unique.

Exercice 11. Soit Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et considérons la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x congru à y modulo 3. Tracer le graphe de cette relation et écrire sa matrice.