CNAM MULHOUSE .

Technicien Développeur Année 2.

Outils mathématiques

Cours Michel GOZE

Chapitre 2

Probabilités sur un ensemble fini

1. Un peu de vocabulaire

1.1. **Expériences aléatoires.** Une espérience est dite aléatoire si on ne peut prédire de façon certaine son résultat. Le calcul des probabilités est la branche des mathématiques qui modélise ces phénomèns aléatoires.

Exemples.

(1) Le lancer d'un dé non truqué est une expérience aléatoire.

(2) Le tirage d'une carte dans un jeu de cartes est aussi une expérience aléatoire.

(3) Citons également le tirage de boules dans une urne.

1.2. **L'univers Ω, ou l'espace probabilisé.** On associe à toute expérience aléatoire un ensemble qui contient tous les résultats possibles de cette expérience. On le note généralement Ω. A cet ensemble Ω, appelé Univers, on associe l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des sous-ensembles de Ω. Tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$, qui est donc un sous-ensemble de ω est appelé un *évènement.* En particulier les sous-ensembles à un élément $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$ sont appelés *évènements élémentaires.*

Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé un espace probabilisable.

Exemples.

(1) Pour le lancer d'un dé non truqué, l'espace Ω est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chacun des résultats $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ est un 'evènement élémentaire.

(2) Pour le tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes, l'ensemble Ω est l'ensemble des valeurs des cartes.

(3) Si on lance deux dés simultanément, l'expérience consistant à noter les chiffres des faces supérieures, alors

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6), (2, 2), \cdots, (2, 6), (3, 3), \cdots, (3, 6), \cdots, (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

et contient 21 éléments.

Nous serons souvent amener à calculer le cardinal de Ω et parfois celui de $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour cela, les résultats du chapitre précédent seront indipensables.

Exemple. On prélève trois cartes dans un jeu de 32. Un élément de l'univers Ω est donc un jeu de trois cartes parmi les 32. On aura donc ici

$$\mathbf{card}(\Omega) = \binom{3}{32}.$$

1.3. **Evènements contraires, incompatibles.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. Pout tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, son complémentaire dans Ω, que l'on notera ici $\overline{A}$ est appelé **l'évènement contaire**.

Exemple. On considère l'expérience consistant à tirer trois cartes simultanément d'un jeu de 32 cartes. On considère l'évènement "obtenir au moins un as parmi ces trois cartes". L"évènement contaire est l'évènement "aucune des trois cartes n'est un as".

Deux sous-ensembles A et B de Ω sont dits **incompatibles** si

$$A \cap B = \emptyset.$$

L'ensemble Ω (qui est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$) est dit l'évènement **certain** alors que $\emptyset$ est appelé l'évènement **impossible**.

2. Probabilités

2.1. **Définition.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable, Ω étant un ensemble fini.

Définition 1. *Une fonction*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

est appelée une probabilité sur cet espace si

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $A \cap B = \emptyset$, *c'est-à-dire si* A *et* B *sont deux évènements incompatibles, alors*

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$$

2.2. **Propriétés.** Notons qu'un espace probabilisable peut avoir plusieurs probabilités.

Proposition 1. *Soit* P *une probabilité sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. *Alors*

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *sont deux évènements pas nécessairement incompatibles, alors*

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Démonstration.

(1) Les évènements Ω et $\emptyset$ sont incompatibles. Donc
$$P(\Omega \bigcup \emptyset) = P(A) = P(A) + P(\emptyset).$$
Donc $P(\emptyset) = 0$.

(2) Les éléments A et $\overline{A}$ sont incompatibles. Donc
$$P(A \bigcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$
Or $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ et donc $P(A \bigcup \overline{A} = P(\Omega) = 1$. Ainsi
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$
d'où la propriété.

(3) On vérifie facilement :
$$A \bigcup B = A \bigcup (\overline{A} \cap B), \quad B = (A \cap B) \bigcup \overline{A} \cap B.$$
Comme les éléments A et $\overline{A} \bigcap B$ sont incompatibles, alors
$$P(A \bigcup B) = P(A \bigcup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \bigcap B)).$$
De même, on aura
$$P(B) = P(A \cap B) \bigcup (\overline{A} \cap B) = P(A \bigcap B) + P(\overline{A} \bigcap B)).$$
Ainsi
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(A \bigcap B).$$

Exemples

(1) Soit $\Omega = \{p, f\}$. . L'application
$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$
définie par
$$P(\{p\}) = \frac{1}{2} = P(\{f\}), \ P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$
est une probabilité sur cet espace.

(2) Soit $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$. L'application P définie à partir de
$$P(\{pp\}) = P(\{pf\}) = P(\{fp\}) = P(\{ff\}) = \frac{1}{4}$$
s'étend en une probabilité. Ceci signifie qu'il existe une unique loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dont la restriction aux éléments élémenatires est donnée par la relations ci-dessus. En particulier si $A = \{pp, pf, fp\}$ qui correspond à l'élément d'avoir au moins pile dans deux lancers d'une pièce, alors $P(A) = \frac{3}{4}$ d'après la propriété (3).

(3) Soit Ω un ensemble fini et considérons l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Supposons que Ω contienne N éléments x_i, $i = 1, \cdots, N$. Considérons la probabilité définie à partir de
$$p_i = P(\{x_i\}) = \frac{1}{N}.$$

Chaque élément élémentaire a la même probabilité. Alors si A est un élément contenant r éléments, on aura
$$P(A) = \frac{r}{N}.$$

Définition 2. *On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

2.3. **Formule de Poincaré.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont deux évènements, nous avons vu que
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$
La formule de Poincaré donne la probabilité d'un élément du type $A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ en fonctions des probabilités des éléments A_i et toutes les intersections. A titre d'exercice, on démontrera le cas $n = 3$. Dans ce cas la formule s'écrit :

Proposition 2. *Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(\Omega)$ trois éléments d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors on a :*
$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \bigcap A_2) - P(A_1 \bigcap A_3) - P(A_2 \bigcap A_3) \\ & + P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3). \end{aligned}$$

On notera, dans cette formule, la règle des signes : le signe $+$ devant les $P(A_i)$, le signe $-$ devant les intersections de deux éléments, le signe $+$ devant l'intersection de trois éléments. Ceci permet de mieux comprendre la formule générale :

Proposition 3. *Soient $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des éléments d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors on a :*
$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n) = \; & P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - \left(\textstyle\sum_{i \neq j \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j)\right) \\ & + \left(\textstyle\sum_{i \neq j \neq k \in \{1, \cdots n\}} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k)\right) + \cdots + \\ & + (-1)^n P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \end{aligned}$$

3. Probabilités uniformes

3.1. **Calcul des probabilités finies.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini. Nous pouvons indexer les éléments de Ω et écrire
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$
Chacun des éléments ω_i deΩ définit un évènement élémentaire $\{\omega_i\} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Posons
$$p_i = P(\{\omega_i\}).$$

Comme ces évènements élémentaires sont incompatibles, on en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Soit $A \subset \Omega$ un évènement. Supposons que A contienne k éléments, c'est-à-dire $\mathrm{card}(A) = k$. Posons

$$A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}.$$

On aura donc

$$p(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}.$$

3.2. **Probabilités uniformes.** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini. avec

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

Définition 3. *On dit que la probabilité P est uniforme si P vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité :*

$$P(\omega) = \frac{1}{n}$$

avec $n = \mathrm{card}(\Omega)$.

Dans ce cas nous aurons

Proposition 4. *Si la probabilité P est uniforme, alors pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on aura*

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exemple. Déterminons la probabilité d'obtenir un nombre pair lors du lancer de dé. Les issues possibles sont donc $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ainsi

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'évènement correspondant à "obtenir un nombre pair" est

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Si le dé n'est pas truqué, la probabilité est ici uniforme. Ainsi

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Notons que les calculs se ramènent souvent à des calculs de combinatoire.

Exemple. Considérons une urne contenant N boules.

(1) On tire k boules simultanément. Dans ce cas Ω est l'ensemble des tirages de k boules et donc

$$\mathrm{card}(\Omega) = \binom{k}{N}.$$

(2) Les tirages sont successifs, la boule tirée est remise dans l'urne. Dans ce cas Ω est l'ensemble des listes de longueur k de l'ensemble des boules et donc
$$\mathrm{card}(\Omega) = N^k.$$

(3) On tire les boules successivement mais sans remise. Dans ce cas Ω est l'ensemble des arrangements de k éléments dans l'ensemble des boules et donc
$$\mathrm{card}(\Omega) = \frac{k!}{(n-k)!}.$$

3.3. **Evènements indépendants.**

Définition 4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé. Deux évènements* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *sont dits indépendants si*
$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Cette notion d'indépendance est fondamentale pour la suite. Elle ne concerne que deux éléments. Pour trois (ou plus) éléments, nous avons la définition suivante

Définition 5. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé. Trois éléments* $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(\Omega)$ *sont dits indépendants si*

(1) $P(A_i \bigcap A_j) = P(A_i)P(A_j),\ i \neq j \in \{1, 2, 3\}$,

(2) $P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Exemple. On considère l'expérience relative à un lancer de deux dés. On a alors
$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \cdots, (1,6), (2,1), (2,2), \cdots, (2,6), \cdots, (6,1), \cdots, (6,6)\}.$$
Cet ensemble fini contient donc $6 \times 6 = 36$ éléments. On considère l'élément$A$ correspondant à la somme des dés est paire :
$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \cdots, (6,6)\}.$$
On a donc
$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$
Considérons maintenat l'év'enement correspondant à la somme est un multiple de 3 On a
$$B = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)\}$$
et
$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$
Mais
$$A \cap B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,6)\}$$
D'où
$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Or
$$P(A)P(B) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
Ainsi
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$
Les évènements A et B sont indépendants.

4. Probabilités conditionnelles

4.1. Définition.

Définition 6. *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *deux éléments tels que* $P(B) \neq 0$. *On appelle probabilité conditionnelle de l'élément* A *sachant* B *le rapport*
$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

Il est clair que la probabilité conditionnelle de A sachant l'évènement total Ω est égal à $P(A)$. De même si B est un élément tel que $B \subset A$, alors $A \bigcap B = B$ et $P(A|B) = 1$.

Exemples.

(1) Supposons que Ω soit un ensemble fini. Notons par n_A, n_B et n le nombre d'éléments de A, B et Ω. Supposons que P soit uniforme, c'est-à-dire
$$P(A) = \frac{n_A}{n},\ P(B) = \frac{n_B}{n}.$$
Alors si $n_{A\cap B}$ est le nombre d'éléments de $A \bigcap B$,
$$P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}.$$
Si de plus, ces éléments sont indépendants, alors $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$ ce qui donne
$$P(A \bigcap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n} = \frac{n_A}{n}\frac{n_B}{n} = \frac{n_A n_B}{n^2}$$
soit
$$n_{A\cap B} = \frac{n_A n_B}{n}.$$
On a alors
$$P(A|B) = \frac{n_A n_B}{n}\frac{1}{n_B} = \frac{n_A}{n} = P(A).$$

(2) On considère une urne contenant 3 boules blanches B_1, B_2, B_3 et 2 boules rouges R_1, R_2. On tire successivement 2 boules. On veut trouver la probabilité de l'élément correspondant à la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. La probabilité pour que la première boule tirée soit blanche est $\frac{3}{5}$. Cela correspond à l'élément$A$ constitué de tous les couples (B_i, B_j) et (B_i, R_k) $i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$ et $k = 1, 2$. La probabilité de tirer une deuxième boule rouge sachant que la première est blanche est égal à $\frac{2}{4}$. Si B est l'élément

la deuxième boule est rouge, alors $A\bigcap B$ est l'élément la première boule tirée est blanche et la deuxième est rouge. on a

$$P(A\bigcap B)=P(A|B).P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}.$$

4.2. **Le théorème de Bayes.**

Théorème 1. *Soient* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ *un espace probabilisé et* $A,B\in\mathcal{P}(\Omega)$ *deux éléments tels que* $P(A)\neq 0$ *et* $P(B)\neq 0$. *Alors*

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration. La démonstration résulte directement des formules de définition de la probabilité conditionnelle.

Ce résultat se généralise de la façon suivante

Théorème 2. *Soient* $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ *un espace probabilisé et* $\{A_1,\cdots,A_k\}$ *une partition de* Ω *telle que chaque* $A_i\in\mathcal{P}(\Omega)$, $i=1,\cdots,k$ *et* $P(A_i)\neq 0$. *Alors pour tout évènement* $B\in\mathcal{P}(\Omega)$, *on a*

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)+\cdots+P(B|A_k)\cdot P(A_k)}$$

pour $i=1,\cdots,k$.

Démonstration. Comme $\{A_1,\cdots,A_k\}$ une partition de Ω, alors pour tout sous-ensemble B de Ω on a

$$B=B\bigcap(A_1\cup\cdots\cup A_k)=(B\cap A_1)\bigcup(B\cap A_2)\bigcup\cdots\bigcup(B\cap A_k).$$

Comme les éléments $B\bigcap A_i)$ sont mutuellement incompatibles, alors

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_k).$$

Mais

$$P(B\bigcap A_i)=P(B|A_i)\cdot P(A_i).$$

Ainsi

$$P(B)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)+\cdots+P(B|A_k)\cdot P(A_k).$$

Mais

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}.$$

Ainsi

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+\cdots+P(B|A_k)\cdot P(A_k)}.$$

EXERCICES

Exercice 1. Quelle est la probabilité d'avoir 4 as dans une main de 5 cartes tirées d'un jeu de 32 cartes ? Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?

Exercice 2. On lance simultanément trois dé et l'on effectue la somme des points obtenus. Comparer les probabilités d'obtenir respectivement 9 et 10. (on distinguera les cas les dés sont discernables par la couleur par exemple, et non discernables.)

Exercice 3 . Une urne contient 5 boules numérotées de 1Ã 5. On en tire successivement deux. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit 5

(1) en supposant qu'on remet la première boule tirée dans l'urne avant le deuxième tirage,
(2) en supposant le tirage sans remise.

Exercice 4 . On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 noires et 3 bleues.

(1) On tire simultanément trois boules.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de chaque couleur ?
(2) On tire successivement les trois boules avec remise.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de chaque couleur ?

Exercice 5 . On considère une urne contenant cinq boules numérotées de1 à 5. On tire sans remise deux boules. Quelle est la probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit 5 sachant que la première boule tirée est le 1 ?

Exercice 6 . On considère une urne contenant six boules blanches et 4 noires. . On tire successivement et sans remise trois boules. Quelle est la probabilité pour que la troisième boule tirée soit noire ?

Exercice 7 . Pour diagnostiquer une certaine maladie, on dispose d'un test qui de révèle positif chez

— 99% des sujets effectivement atteints,
— 5% des sujets sains.

Une personne appartenant à une population où $0,5\%$ des individus souffrent de cette affection subit le test. Quelle est la probabilité qu'elle soit effectivement atteinte ?

Exercice 8 . Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\%$ des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif.

Exercice 9 . Une pièce de monnaie est lancée deux fois. On considère les évènements

— A : " les deux lancers ne donnent pas le même résultat.
— B : "le deuxième lancer donne face.

(1) On suppose la pièce équilibrée. Ces évènements sont-ils indépendants ?
(2) On suppose la pièce non équilibré et la probabilité d'avoir pile est $0,75$. Les évènements A et B ont-ils indépendants ?