CNAM MULHOUSE .

# Technicien Développeur Année 2.

# Outils mathématiques

# Cours Michel GOZE

*Chapitre 1*

# Combinatoire

## 1. Ensembles. Cardinalité

1.1. **Un bref rappel sur les ensembles.** Un ensemble est une collection d'objets appelés les éléments de cet ensemble.

**Exemples**

(1) $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

(2) $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = \{cdots, -3, -2, -1 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

(3) $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q} = \{p/Q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\}$,

(4) $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Un ensemble qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments est dit fini. Lorsque ce nombre fini n'est pas trop grand, on représente parfois cet ensemble en écrivant tous les éléments qu'il contient de la façon suivante :

$$\{a, b, c\}$$

il s'agit ici d'un ensemble contenant (seulement) les trois lettres $a$, $b$, $c$.

Soit $E$ un ensemble. Si $a$ est un élément de $E$, on écrit

$$a \in E$$

qui se lit $a$ appartient à $E$.

**Définition 1.** *Deux ensembles $E$ et $F$ sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si $a \in E$ alors $a \in F$ et si $b \in F$ alors $b \in E$.*

**Définition 2.** *On dit qu'un ensemble $E$ est inclus dans un ensemble $F$ si tout élément de $E$ est un élément de $F$. Dans ce cas on écrit*

$$E \subset F$$

*qui se lit $E$ est inclus dans $F$.*

L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément. C'est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

**Définition 3.** *Soit $E$ un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de $E$, l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de $E$.*

Cet ensemble va jouer un rÃ´le prépondérant dans la suite. **Exemples**

(1) Soit $E$ l'ensemble à deux éléments : $E = \{a, b\}$. Alors $E$ admet comme sous-ensembles $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ et $E$ lui même. En effet, de par la définition de l'inclusion, on a toujours $E \subset E$. Ainsi
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$
Si $E$ contient 2 éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 4 éléments.

(2) Soit $E$ l'ensemble à trois éléments : $E = \{a, b, c\}$. Alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$
Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments.

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$. On définit

(1) $A \bigcup B = \{x \in E,\ x \in A$ **ou** $x \in B\}$
(2) $A \bigcap B = \{x \in E,\ x \in A$ **et** $x \in B\}$
(3) $\complement_E A = \{x \in E$ tels que $x \notin A\}$
(4) $A \setminus B = \{x \in E,\ x \in A$ **et** $x \notin B\}$.

### 1.2. **Cardinal d'un ensemble fini.**

**Définition 4.** *Un ensemble $E$ est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments (o peut compter tous ses éléments). Si $E$ est un ensemble fini, son cardinal noté* $\mathrm{card}(E)$ *est le nombre de ses éléments.*

Si $A$ est une partie de $E$, alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$ et comme $E$ est supposé fini, l'égalité n'a lieu que si $A = E$. On note dès à présent que ceci est faux si $E$ est infini (s'il n'est pas fini).

**Quelques propriétés du cardinal**

(1) Si $A$ et $B$ sont des sous-ensembles d'un ensemble fini $E$, alors
$$\mathrm{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}.$$

(2) Soit $A \times B = \{(a, b), A \in A, b \in B\}$ le produit cartésien de $A$ et $B$, alors
$$\mathrm{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}.$$

Soit $E$ un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $E$. Alors

**Proposition 1.** *Si* $n = \mathrm{card(E)}$, *alors*
$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 2^{\mathrm{n}}.$$

Par exemple si $E = 1, 2$, alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$$
et $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 4 = 2^2$. De mÃªme, si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$$
et $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 8 = 2^3$.

## 2. Applications, bijections

### 2.1. Applications injectives, surjectives, bijectives.

**Définition 5.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle fonction définie sur $E$ et à valeurs dans $F$ toute opération consistant à faire correspondre à chaque élément $x \in E$ un élément bien déterminé de $F$ ;*

L'ensemble $E$ s'appelle l'ensemble de définition de la fonction. Au lieu de dire "soit une fonction ayant $E$ comme ensemble de départ et $F$ comme ensemble d'arrivée, on dira plutÃ´t : **soit $f$ une application de $E$ dans $F$.**

### 2.2. Composition des applications.

Soient $A_1$,$A_2$ et $A_3$ trois ensembles et
$$f : A_1 \to A_2, \quad g : A_2 \to A_3$$
deux applications. Alors l'application
$$x \in A_1 \to g(f(x)) \in A_3$$
est une application de $A_1$ dans $A_3$ appelée la composition de $g$ et $f$ et notée $g \circ f$ :
$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

### 2.3. Applications injectives, surjectives et bijectives.

Soit $f : A \to B$ une application.

**Définition 6.** *(1) On dit que $f$ est* **injective** *si deux éléments distincts de $A$ ont des images distinctes, autrement dit si*
$$x \neq x' \ (x, x' \in A) \ \text{ implique } \ f(x) \neq f(x').$$
*(2) On dit que $f$ est Bf surjective si tout élément de $B$ est l'image d'au moins un élément de $A$.*
*(3) On dit que $f$ est Bf bijective si elle est injective et surjective.*

On notera que la condition d'injectivité est équivalente à

$$\text{pour tout } x, x' \in A, \text{ alors } f(x) = f(x') \text{ implique } x = x'.$$

La condition de surjectivité s'écrit aussi :

$$\text{Pour tout } y \in B, \text{ il existe } x \in A \text{tel que } y = f(x).$$

2.4. **Image réciproque.** Soit $f : A \to B$ une application. On appelle image directe de $A$ par $f$ et on le note $f(A)$ le sous-ensemble de $B$ définie par

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Ainsi, dire que $f$ est surjective se traduit par $B = f(A)$.

Soit $B_1 \subseteq B$ un sous-ensemble de $B$. On appelle image réciproque de $B_1$ par $f$ le sous-ensemble de $A$, noté $f^{-1}(B_1)$ dont les éléments sont les éléments $x \in A$ tels que $f(x) \in B_1$ :

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A,\ f(x) \in B_1\}.$$

**ATTENTION** Il ne faut pas confondre la notation $f^{-1}$ que nous venons de présenter avec la fonction $f^{-1}$ qui est notée de la mÃªme manière mais qui n'est définie que si $f$ et bijective et qui représente dans ce cas l'application inverse :

$$f \circ f^{-1} = Id_B, \quad f^{-1} \circ f = Id_A$$

où $Id$ désigne l'application identité.

2.5. **L'ensemble $F^E$.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Soit $F^E$ l'ensemble de toutes les applications de $E$ dans $F$.

**Proposition 2.** *Si* $n = \mathrm{card(E)}$ *et* $p = \mathrm{card(F)}$, *alors*

$$\mathrm{card(F^E) = p^n}.$$

Par exemple si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathrm{card(F^E)} = 3^2 = 9.$$

Certte propriété est très pratique car elle évite de lister toutes les applications pour pouvoir les compter. Dans cet exemple, les 9 applications sont

$$\begin{cases} f_1(1) = a, f_1(2) = a \\ f_2(1) = a, f_2(2) = b \\ f_3(1) = a, f_3(2) = c \\ f_4(1) = b, f_4(2) = a \\ f_5(1) = b, f_5(2) = b \\ f_6(1) = b, f_6(2) = c \\ f_7(1) = c, f_7(2) = a \\ f_8(1) = c, f_8(2) = b \\ f_9(1) = c, f_9(2) = c \end{cases}$$

## 3. Arrangements

### 3.1. Définition.

**Définition 7.** *Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments Soit $p$ un entier non nul tel que $p \leq n$. Un arrangement de $p$ éléments de $E$ est un $p$-uple $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de $p$ éléments de $E$ deux à deux distincts.*

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et si $p = 3$, les arrangements à 3 éléments de $E$ sont :

$$(1,2,3),(2,1,3),(3,2,1),(1,3,2),(2,3,1),(3,1,2),(1,2,4),(2,1,4),(4,2,1),$$
$$(1,4,2),(2,4,1),(4,1,2),(1,3,4),(3,1,4),(4,3,1),(1,4,3),(3,4,1),(4,1,3),$$
$$(2,3,4),(3,2,4),(4,3,2),(2,4,3),(3,4,2),(4,2,3).$$

Les arrangements à 2 éléments de $E$ sont :

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3).$$

### 3.2. Nombre d'arrangements.

**Proposition 3.** *Le nombre d'arrangements de $p$ éléments de $E$ de cardinalité $n$, $n \geq p$, est*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Dans l'exemple ci-dessus, nous avions tout d'abord $n = 4$ et $p = 3$. Le nombre d'arrangements est

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot (4 - 3 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Lorsque $p = 2$

$$A_4^2 = 4 \cdot (4 - 2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12.$$

## 4. Les coefficients binomiaux

**4.1. La factorielle.** Pour tout entier $n$ non nul, on pose

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

et se lit factorielle $n$.

Par exemple

$$3! = 3.2.1 = 6, \;\; 4! = 4.3.2.1 = 12.$$

On remarque rapidement que

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

**Convention**. On pose

$$0! = 1.$$

4.2. **Les coefficients binomiaux.** Soient $n$ et $p$ deux entiers non nuls et $n \geq p$. Le coefficient binomial
$$\binom{n}{k}$$
est le nombre entier défini par
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Ces nombres s'appellent ainsi car ils apparaissent dans le développement du binÃ´me :
$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n.$$

**Proposition 4.** *On a*

*(1)* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

*(2)* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

On notera toutefois, que lorsque $n$ ou $k$ ou les deux sont des grands nombres, ces coefficients sont compliqués à calculer.

Les propriétés ci-dessus permettent de dresser le triangle de Pascal :

| $n/p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

Chaque ligne de ce tableau est la liste des coefficients du développement de $x+y)^n$, $n$ étant le numéro de ligne.

**Conventions.**
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

## 5. Les permutations

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

**Définition 8.** *Une permutation de $E$ est un arrangement de $n$ éléments de $E$ deux à deux distincts.*

On en déduit que le nombre de permutations de $E$ est
$$A_n^n = n!.$$

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, il y a
$$3! = 6$$
permutations qui sont
$$(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2).$$
Comme on peut considérer une permutation de $E$ comme une bijection de $E$ dans lui mÃªme, on en déduit que le nombre de bijections de $E$ dans $E$ est $n!$.

**Remarque : applications aux automates cellulaires.** La propriété suivante est la base de la théorie des automates :

*Toute application injective de l'ensemble fini $E$ dans $E$ est aussi bijective.*

## 6. Les combinaisons

### 6.1. Definition.

**Définition 9.** *Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et soit $p$ un entier , $p \leq n$. Une combinaison de $p$ éléments de $E$ est une partie de $E$ de $p$ éléments.*

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et si $p = 3$, les combinaisons à 3 éléments de $E$ sont :
$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4).$$
Les combinaisons à 2 éléments de $E$ sont :
$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).$$

Par rapport à un arrangement à $p$ éléments, dans une combinaison, on ne tient pas compte de l'ordre dans l'écriture des termes : par exemple $(1; 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ sont des mÃªmes combinaisons.

### 6.2. Nombre de combinaisosns.

**Proposition 5.** *Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et soit $p$ un entier , $p \leq n$. Le nombre de combinaisons de $p$ éléments de $E$ est*
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

## EXERCICES

**Exercice 1.** Soient $A, B, C$ des sous-ensembles d'un ensemble donné $E$. Montrer que si

$$A \cup C \subset A \cup B \text{ et } A \cap C \subset A \cap B$$

alors

$$C \subset B.$$

**Exercice 2.** Dans une classe de 32 élèves, 21 parlent l'anglais et 18 l'allemand. On suppose que chaque élève parle au moins une de ces langues. Combien d'élèves parlent à la fois l'anglais et l'allemand ?

**Exercice 3.** Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On appelle différence symétrique de ces deux ensembles, l'ensemble

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Si $n$ et le cardinal de $A$ et $p$ celui de $B$, calculer le cardinal de $(A\Delta B)$.

**Exercice 4.** Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

**Exercice 5.** Combien y a-t-il d'entiers compris entre 1 et 999 et ne contenant pas 0 ?

**Exercice 6.** Quel est le nombre de tiercés possibles dans une course comptant 15 chevaux ? Quelle est la chance de gagner dans un tiercé dans le désordre ?

**Exercice 7.** Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot COMPRIS qui commencent par I et se terminent par une consonne.

**Exercice 8.** On place 5 hommes et 4 femmes sur un banc, les femmes occupant les places paires. Combien y-a-t-il de possibilités ?

**Exercice 9.** On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

**Exercice 10.** Une course oppose 20 concurrents, dont Emile.

(1) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
(2) Combien y-a-t-il de podiums possibles où Emile est premier ?
(3) Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Emile fait partie ?
(4) On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

**Exercice 11.** Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

(1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
(2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

(3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

(4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

(1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

(2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

(3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

**Exercice 12.** Le disque de l'armée mexicaine est un outil de cryptographie utilisé par l'armée mexicaine au début du XXiè siècle. Il est constitué de 5 disques de diamètres différents, empilés les uns sur les autres, et qui peuvent tourner les uns par rapport aux autres. Chaque disque est partagé en 26 parts. Sur le bord du plus grand disque, on écrit les 26 lettres, de A à Z. Sur le bord du second disque, on écrit les 26 nombres 01,02,...,26. Sur le bord du troisième disque, on écrit 27...,52, sur le bord du quatrième disque, 53,...78, et enfin sur le bord du plus petit dique, 79,...,99, et 00 (il reste 4 secteurs sans nombre sur le plus petit disque). On convient alors d'une clé, qui est un mot de 4 lettres, par exemple FRED. On fait alors coïncider le plus petit nombre du deuxième disque, à savoir 01, avec la première lettre de la clé, ici F. On fait de même tourner le troisième disque pour faire coïncider son plus petit nombre, 27, en face de la deuxième lettre de la clé, R, et ainsi de suite pour les deux autres disques. Pour chiffrer un message, on remplace alors une lettre par l'un des 3 ou 4 nombres qui lui fait face sur le disque. Avec l'exemple précédente, on pourrait remplacer E par 26, 40, 53 ou 80. Combien-y-a-t-il de clés possibles pour cette méthode de chiffrement ?

**Exercice 13.** Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Premiére Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou aprés éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ? Pour quelles valeurs de $n$ peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté $n$ ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

**Exercice 14.** On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

(1) sans imposer de contraintes sur les cartes.

(2) contenant 5 carreaux ou 5 piques.

(3) 2 carreaux et 3 piques.

(4) au moins un roi.

(5) au plus un roi.

(6) 2 rois et 3 piques (exactement).