RAMM ALGEBRA CENTER

L3 Mathématiques

Mathématiques : THEORIE DES CORPS

Elisabeth REMM- Michel GOZE

Chapitre 2

Corps finis : Résumé

1. Caractéristique d'un corps fini

Un corps $\mathbb{K}$ est dit fini s'il ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Exemples.

- Pour tout entier p premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments de caractéristique p. On le note $\mathbb{F}_p$.
- Soit A un anneau intègre fini contenant au moins 2 éléments. Alors A est un corps.

1.1. **Caractéristique d'un corps fini.**

Proposition 1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Alors sa caractéristique est non nulle.*

1.2. **L'homomorphisme de Frobenius sur un corps fini.**

Proposition 2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique p. Alors l'homomorphisme de Frobenius*

$$\mathcal{F} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

donné par $\mathcal{F}(x) = x^p$ est un automorphisme.

2. Le théorème de Wedderburn

Théorème 1. *Tout corps fini est commutatif*

Soit $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{K}$. Alors

Proposition 3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Alors le groupe $\mathbb{K}^*$ des éléments inversibles est cyclique.*

3. Corps finis algébriquement clos

Proposition 4. *Un corps fini n'est jamais algébriquement clos*

4. Existence et unicité et cardinalité des corps finis

Théorème 2. *Soit p un nombre premier et soit n un entier supérieur ou égal 1. Il existe alors un corps fini de caractéristique p et de cardinalité p^n. De plus si $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont deux corps de caractéristique p et de cardinalité p^n, ils sont isomorphes.*