Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L3 MATHEMATIQUES - GEOMETRIE

TD1 : Géométrie du triangle

Exercice 1 : Théorèmes de Ménélaüs et de Céva. Soient un triangle ABC, M un point de la droite (BC), N un point de la droite (AC), et P un point de la droite (AB).

(1) (Théorème de Ménélaüs) Montrer que les points M, N et P sont alignés si et seulement si
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$
(2) (Théorème de Céva) Montrer que les droites (AM), (BN) et $CP)$ sont concourantes si et seulement si
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$
(3) Utiliser le théorème de Céva pour montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2. Soient D, E et F les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport à ses trois côtés.

(1) Montrer que ces points sont sur le cercle circonscrit à ABC.
(2) On suppose que les angles du triangle ABC sont aigus. Montrer que les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures du triangle DEF.
(3) On donne un triangle DEF. Construire un triangle ABC dont les hauteurs soient les bissectrices intérieures du triangle DEF.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non aplati. On note $a = AB$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{CAB}$ $(\in]0, \pi[)$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ le demi-périmètre. Soit H le pied de la hauteur issue de A.

(1) Montrer que $AH = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
(2) En déduire la formule de Héron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Exercice 4. Soit un triangle ABC. Considérons la médiane AM.

(1) Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2MA^2 + 2MC^2$.
(2) En déduire le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances deux points fixes est une constante (positive).
(3) Calculer les longueurs des médianes en fonction des longueurs a, b, c des côtés du triangle ABC.

Exercice 5.

(1) Montrer que dans un triangle, la différence des carrs de deux côtés est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection sur lui de la médiane correspondante.

(2) En déduire le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances deux points fixes est une constante donnée.

Exercice 6. (Problème de Fagnano). Soit un triangle dont les trois angles sont aigus. On cherche trois points P, Q et R sur ses trois côtés de façon que le périmètre de PQR soit minimal. Montrer qu'il existe une solution, puis construire les trois points qui réalise cette solution.

On pourra considérer d'abord un point P arbitraire du segment $[BC]$ et ses symétriques Q_1 et R_1 par rapport aux deux autres côtés pour minimiser le périmètre de PQR, P étant fixé, puis faire varier P.

Montrer qu'alors les hauteurs de ABC sont les bissectrices de PQR.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Une droite $\mathcal{D}$ passant par A coupe la droite (BC) en P. Montrer que $\mathcal{D}$ est une bissectrice de l'angle en A si et seulement si

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Exercice 8. (La droite d'Euler.) Soient un triangle ABC, A' le milieu de BC, B' le milieu de AC et C' celui de AB. On désigne par O le centre du cercle circonscrit ABC et par G son centre de gravité. Montrer que

(1) le triangle $A'B'C'$ est l'homothétique de ABC dans l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$,
(2) G est le centre de gravité de $A'B'C'$, que sont les hauteurs de $A'B'C'$?
(3) le point $H = h^{-1}(O)$ est l'orthocentre du triangle ABC.
(4) En déduire que les points H,G et O sont alignés et que $2\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GH}$.

La droite (OG) est dite droite d'Euler du triangle ABC.